

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ГИДРОДИНАМИКЕ

**В.А. Кудинов, И.В. Кудинов**

*Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия*

В настоящей работе приводится исследование точных аналитических решений двух типов гиперболических уравнений теплопроводности, одно из которых получено на основе релаксационной формулы Максвелла – Каттанео – Лыкова для теплового потока, а второе – путем введения релаксационных поправок как для теплового потока, так и для градиента температуры в формуле Фурье. Полученные во втором случае гиперболические уравнения содержат третью и четвертую (в зависимости от числа коэффициентов релаксации) производные по пространственной переменной и времени (смешанные производные). Исследования полученных в настоящей работе точных аналитических решений указанных уравнений показали не только количественное но существенное качественное различие результатов этих решений.

В диффузионных уравнениях типа Фурье для теплового потока, Ньютона для касательного напряжения, Фика для переноса массы, и др. заложена бесконечная скорость распространения возмущений, что приводит к известным парадоксам – бесконечный тепловой поток или бесконечные касательные напряжения на стенке, бесконечные скорости движения изотерм или изотак и проч. Следовательно, в нестационарных процессах законы распространения потенциалов, вообще говоря, не подчиняются строго перечисленным выше законам ввиду отсутствия в них параметров, учитывающих конечную скорость распространения возмущений.

С учетом инерционности теплового потока во времени была предложена формула для теплового потока (известна как формула Максвелла – Каттанео – Лыкова) [1 – 4]

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_r \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (1)$$

на основе которой выводится классическое гиперболическое уравнение вида

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Применительно к разгонному течению жидкостей соответствующие уравнения имеют вид [5, 6]

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \tau_p \frac{\partial \tau}{\partial t}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(y, t)}{\partial t} + \tau_p \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Исследованию решений уравнений (2) и (4) посвящено большое число работ, из анализа которых следует, что, устраняя одни парадоксы, данные уравнения порождают другие. Это скачок на кривых температуры или скорости, что равнозначно возникновению изотерм или изотак внутри тела, появление отрицательных температур или скоростей, что свидетельствует о нарушении закона сохранения энергии [4, 7 – 16, 22].

С целью выяснения причин такого рода результатов проанализируем вывод формулы Максвелла – Каттанео – Лыкова. А.В. Лыковым эта формула была получена из предложенной им обобщенной системы уравнений Онзагера вида [3, 4]

$$J_i = L_i^{(r)} \frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \left( L_{ik} X_k + L'_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial t} \right). \quad (5)$$

При выводе формулы (1) А.В. Лыков предлагает пренебречь производной от термодинамической силы по времени в соотношении (5), обосновывая это тем, что для процессов массотеплопереноса изменение термодинамических сил во времени невелико (см. [3], стр. 190, [4], стр. 449). Тогда, полагая  $L_i^{(r)} = -\tau_r$ ,  $L_{ik} = \lambda$  и принимая  $L'_{ik} \partial X_k / \partial t = 0$ , из (5) получаем формулу (1) для теплового потока.

Если составляющей  $L'_{ik} \partial X_k / \partial t$  не пренебрегать, то, принимая  $L'_{ik} = -\lambda \tau_r$ , из (5) получаем следующую формулу для теплового потока

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \tau_r \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (6)$$

Формулу (6) можно также получить, если в уравнении (1) вводить релаксационную поправку не только для теплового потока, но и для градиента температуры, т.е. соотношения для  $q$  и  $\partial T / \partial x$  в формуле закона Фурье для теплового потока

$$q = -\lambda \partial T / \partial x \quad (7)$$

представлять следующим образом [7, 10]

$$q + \tau_r \partial q / \partial t \quad \text{и} \quad \partial T / \partial x + \tau_r \partial^2 T / (\partial x \partial t).$$

Формула (7) в этом случае приводится к виду

$$q + \tau_r \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( T + \tau_r \frac{\partial T}{\partial t} \right). \quad (8)$$

Соотношение (8) полностью совпадает с формулой (6).

На основе формулы (6), используя уравнение теплового баланса

$$c \gamma \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad (9)$$

выводится следующее гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} = a \left[ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial^3 T(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right]. \quad (10)$$

Отличие уравнения (10) от уравнения (2) в том, что в правой части появляется слагаемое с производной третьего порядка по пространственной переменной и времени (смешанная производная). Как показали приведенные ниже исследования, учет слагаемого с производной третьего порядка в уравнении (10) приводит к существенному не только количественному, но и качественному отличию получаемых результатов по сравнению со случаем его отсутствия.

Рассмотрим вывод аналогичного уравнения для движущейся жидкости. В работе [3] для касательного напряжения в жидкости приведено следующее уравнение, теоретическим путем полученное Олдройдом [17]

$$\tau_{ik} = \eta \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} + \eta' \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial t^2} - \tau_p \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial t}. \quad (11)$$

Если обозначить  $\eta = L$ ,  $\eta' = L'$  и  $L^{(r)} = -\tau_p$ , то уравнение (11) тождественно уравнению (5).

Обозначая  $\eta = \mu$ ,  $\eta' = \mu \tau_p$ , а также, учитывая, что

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dl_x}{dy} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dy} (ut) \right] = \frac{du}{dy},$$

соотношение (11) приводится к виду

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \tau_p \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mu \tau_p \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}. \quad (12)$$

Последнее соотношение по форме записи идентично соотношению (6). Отметим, что соотношение (12) можно также получить из уравнения Ньютона для касательного напряжения

$$\tau = \mu \partial u / \partial y, \quad (13)$$

если ввести релаксационные добавки как для касательного напряжения, так и для градиента скорости, т.е. представлять их в виде соотношений  $\tau + \tau_p \frac{\partial \tau}{\partial t}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_p \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}$ .

Заменяя этими соотношениями  $\tau$  и  $\partial u / \partial y$  в формуле (13), приходим к формуле (12) для касательного напряжения.

На основе (12) с использованием основного уравнения динамики в напряжениях [5]

$$\rho \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(y,t)}{\partial y}$$

выводятся следующие гиперболические уравнения для касательного напряжения и для скорости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau(y,t)}{\partial t} + \tau_p \frac{\partial^2 \tau(y,t)}{\partial t^2} &= \nu \left[ \frac{\partial^2 \tau(y,t)}{\partial y^2} + \tau_p \frac{\partial^3 \tau(y,t)}{\partial y^2 \partial t} \right]; \\ \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} + \tau_p \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial t^2} &= \nu \left[ \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2} + \tau_p \frac{\partial^3 u(y,t)}{\partial y^2 \partial t} \right]. \end{aligned}$$

Аналогичное уравнение может быть получено и для задач диффузии вихря.

Как видно, последние два уравнения по форме записи полностью идентичны уравнению (10). Следовательно, при одинаковых граничных условиях решения этих уравнений в безразмерном виде будет одинаковы.

Для получения гиперболического уравнения с производными еще более высокого порядка представим тепловой поток и градиент температуры соотношениями, включающими их производные по времени более высокого порядка [18, 20], то есть

$$q + \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( t + \tau_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right). \quad (14)$$

Соотношение (14) можно переписать в виде

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial t^2} \right) - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} - \tau_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Подставим (15) в уравнение теплового баланса (9)

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial t^2} \right) + \tau_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x \partial t^2}. \quad (16)$$

Продифференцируем уравнение (9) один раз и дважды по переменной  $t$

$$c\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t}; \quad (17) \quad c\gamma \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = -\frac{\partial^3 q}{\partial x \partial t^2}. \quad (18)$$

Уравнение (16) с учетом (17), (18) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial t^2} \right). \quad (19)$$

Найдем точное аналитическое решение уравнения (19) для бесконечной пластины с симметричными граничными условиями первого рода и постоянным ненулевым начальным условием. Указанные начальные и граничные условия имеют вид

$$T(x, 0) = T_0; \quad (20) \quad \frac{\partial T(x, 0)}{\partial \tau} = 0; \quad (21) \quad \frac{\partial^2 T(x, 0)}{\partial \tau^2} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad T(\delta, \tau) = T_{\text{ст}}. \quad (23)$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2}; \quad \text{Fo}_1 = \frac{a\tau_1}{\delta^2}; \quad \text{Fo}_2 = \frac{a^2\tau_2^2}{\delta^4}. \quad (24)$$

С учетом принятых обозначений задача (19) – (23) приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} + \text{Fo}_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \text{Fo}^3} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \text{Fo}_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}} + \text{Fo}_2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}^2}; \quad (25)$$

$$(\text{Fo} > 0; \quad 0 \leq \Theta \leq 1; \quad 0 \leq \xi < 1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (26) \quad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad (27) \quad \frac{\partial^2 \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}^2} = 0; \quad (28)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (29) \quad \Theta(1, \text{Fo}) = 0. \quad (30)$$

Решение задачи (25) – (30), следуя методу разделения переменных принимается в виде

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \varphi(\text{Fo})\psi(\xi). \quad (31)$$

Подставляя (31) в (25), находим

$$\frac{\varphi' + \text{Fo}_1 \varphi'' + \text{Fo}_2 \varphi'''}{\varphi + \text{Fo}_1 \varphi' + \text{Fo}_2 \varphi''} = \frac{\psi''}{\psi} = -\mu^2, \quad (32)$$

Из (32) получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\text{Fo}_2 \varphi''' + (\text{Fo}_1 + \nu \text{Fo}_2) \varphi'' + (1 + \nu \text{Fo}_1) \varphi' + \nu \varphi = 0; \quad (33)$$

$$\psi'' + \nu \psi = 0, \quad (34)$$

где  $\nu = -\mu^2$  – некоторая постоянная.

Подставляя (31) в (29), (30), получаем граничные условия для уравнения (34)

$$d\psi(0)/d\xi = 0; \quad (35) \quad \psi(1) = 0. \quad (36)$$

Решение краевой задачи Штурма – Лиувилля (34) – (36) принимается в виде

$$\psi(\xi) = \cos(r\pi\xi/2). \quad (r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, \infty}) \quad (37)$$

Очевидно, что соотношение (37) удовлетворяет условиям (35), (36). Подставляя (37) в (34), для нахождения собственных чисел получаем формулу

$$\nu_k = r^2 \pi^2 / 4. \quad (r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, \infty}) \quad (38)$$

Характеристическое уравнение для однородного дифференциального уравнения (33) имеет вид

$$\text{Fo}_2 z^3 + (\text{Fo}_1 + \nu_k \text{Fo}_2) z^2 + (1 + \nu_k \text{Fo}_1) z + \nu_k = 0. \quad k = \overline{1, \infty} \quad (39)$$

Корни алгебраического уравнения третьей степени для каждого собственного числа будут

$$z_1 = 0,5 \left( -\text{Fo}_1 + \sqrt{\text{Fo}_1^2 - 4\text{Fo}_2} \right) / \text{Fo}_2; \quad (40)$$

$$z_2 = 0,5 \left( -\text{Fo}_1 - \sqrt{\text{Fo}_1^2 - 4\text{Fo}_2} \right) / \text{Fo}_2; \quad (41)$$

$$z_{3k} = -\nu_k. \quad (42)$$

В случае, если в соотношениях (40), (41) подкоренное выражение

$$D = (4\text{Fo}_2 - \text{Fo}_1^2) > 0,$$

то будем иметь следующие два комплексных корня

$$z_1 = \gamma + i\beta; \quad z_2 = \gamma - i\beta, \quad (43)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\gamma = -0,5Fo_1/Fo_2$ ;  $\beta = 0,5\sqrt{4Fo_2 - Fo_1^2}/Fo_2$ .

Частные решения уравнения (33) будут

$$\varphi_1 = \exp(\gamma + i\beta)Fo; \quad \varphi_2 = \exp(\gamma - i\beta)Fo; \quad \varphi_{3k} = \exp(-v_k Fo). \quad (44)$$

На основе частных решений запишем общий интеграл уравнения (33)

$$\varphi_k(Fo) = C_{1k} \exp[(\gamma + i\beta)Fo] + C_{2k} \exp[(\gamma - i\beta)Fo] + C_{3k} \exp(-v_k Fo), \quad (45)$$

где  $C_{jk}$  ( $j=1, 2, 3$ ;  $k=\overline{1, \infty}$ ) – неизвестные постоянные.

Соотношение (45) можно переписать следующим образом

$$\varphi_k(Fo) = \exp(\gamma Fo)[C_{1k} \exp(i\beta Fo) + C_{2k} \exp(-i\beta Fo)] + C_{3k} \exp(-v_k Fo). \quad (46)$$

Используя формулы Эйлера  $\exp(is) = \cos s + i \sin s$ ;  $\exp(-is) = \cos s - i \sin s$ , соотношение (46) приводится к виду

$$\begin{aligned} \varphi_k(Fo) = \exp(\gamma Fo)[C_{1k} (\cos(\beta Fo) + i \sin(\beta Fo)) + C_{2k} (\cos(\beta Fo) - i \sin(\beta Fo))] + \\ + C_{3k} \exp(-v_k Fo) = \exp(\gamma Fo)[(C_{1k} + C_{2k}) \cos \beta Fo - \\ - i(C_{2k} - C_{1k}) \sin \beta Fo] + C_{3k} \exp(-v_k Fo). \end{aligned} \quad (47)$$

Введем обозначения  $B_{1k} = C_{1k} + C_{2k}$ ;  $B_{2k} = i(C_{2k} - C_{1k})$ .

С учетом принятых обозначений общее решение уравнения (33) будет

$$\varphi_k(Fo) = \exp(\gamma Fo)[B_{1k} \cos(\beta Fo) - B_{2k} \sin(\beta Fo)] + C_{3k} \exp(-v_k Fo). \quad (48)$$

Подставляя (37), (48) в (31), находим

$$\begin{aligned} \Theta_k(\xi, Fo) = \{ \exp(\gamma Fo)[B_{1k} \cos(\beta Fo) - B_{2k} \sin(\beta Fo)] + \\ + C_{3k} \exp(-v_k Fo) \} \cos(r\pi\xi/2). \end{aligned} \quad (49)$$

Каждое частное решение (49) удовлетворяет уравнению (25) и граничным условиям (29), (30), но ни одно из них не удовлетворяет начальным условиям (26) – (28).

Составим сумму частных решений

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \exp(\gamma Fo)(B_{1k} \cos(\beta Fo) - B_{2k} \sin(\beta Fo)) + \\ + C_{3k} \exp(-v_k Fo) \} \cos(r\pi\xi/2). \quad (r=2k-1; k=\overline{1, \infty}) \end{aligned} \quad (50)$$

Для определения неизвестных постоянных  $B_{1k}$ ,  $B_{2k}$  и  $C_{3k}$  используются начальные условия (26) – (28). Подставляя (50) в начальное условие (27), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma B_{1k} - \beta B_{2k} - v_k C_{3k}) \cos(r\pi\xi/2) = 0.$$

Отсюда находим

$$B_{1k} = -(v_k C_{3k} + \beta B_{2k}) / \gamma. \quad (51)$$

Подставляя (50) в (28), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(\gamma^2 - \beta^2) B_{1k} + 2\gamma\beta B_{2k} + v_k^2 C_{3k}] \cos(r\pi\xi/2) = 0.$$

Отсюда с учетом (51) будем иметь

$$B_{2k} = -\frac{v_k C_{3k} [\gamma(v_k - \gamma) + \beta^2]}{\beta(\gamma^2 + \beta^2)}. \quad (52)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $C_{3k}$  составим невязку начального условия (26) и потребуем ортогональности невязки ко всем собственным функциям (37), т.е.

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (B_{1k} + C_{3k}) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi\right) \right] d\xi - \int_0^1 \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi = 0. \quad (53)$$

$(j = r = 2k - 1)$

Соотношение (53) с учетом ортогональности косинусов приводится к виду

$$\int_0^1 (B_{1k} + C_{3k}) \cos^2\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi - \int_0^1 \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi = 0. \quad (54)$$

Определяя интегралы в (54), с учетом (51) и (52) находим

$$C_{3k} = \frac{4\gamma}{r\pi} \left/ \left\{ v_k + \frac{v_k [\gamma(v_k - \gamma) + \beta^2]}{\gamma^2 + \beta^2} + \gamma \right\} \right. . \quad (55)$$

В случае, если в соотношениях (40), (41)  $D = (4Fo_2 - Fo_1^2) < 0$ , то корни  $z_1$  и  $z_2$  будут действительными и отрицательными. Общий интеграл уравнения (33) в данном случае будет

$$\varphi_k(Fo) = D_{1k} \exp(z_1 Fo) + D_{2k} \exp(z_2 Fo) + D_{3k} \exp(z_{3k} Fo), \quad (56)$$

где  $D_{1k}, D_{2k}, D_{3k}$  – неизвестные коэффициенты.

Подставляя (37), (56) в (31) и составляя сумму частных решений, получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [D_{1k} \exp(z_1 Fo) + D_{2k} \exp(z_2 Fo) + D_{3k} \exp(z_{3k} Fo)] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) \right\}. \quad (r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, \infty}) \quad (57)$$

Коэффициенты  $D_{1k}, D_{2k}, D_{3k}$ , определяемые из начальных условий (26) – (28), в данном случае имеют вид

$$D_{1k} = -\frac{D_{2k} z_2 + D_{3k} z_{3k}}{z_1}; \quad D_{2k} = -\frac{D_{3k} z_{3k} (z_{3k} - z_1)}{z_2 (z_2 - z_1)};$$

$$D_{3k} = \frac{4}{r\pi} \left/ \left[ \frac{z_{3k}}{z_1} \left( \frac{z_{3k} - z_1}{z_2} - 1 \right) + 1 \right] \right. . \quad (58)$$

После определения коэффициентов  $B_{1k}, B_{2k}, C_{3k}$  для случая, когда подкоренные выражения соотношений (40), (41) больше нуля, точное аналитическое решение задачи (25) – (30) находится из (50). В случае, когда они меньше нуля, точное аналитическое решение после определения коэффициентов  $D_{1k}, D_{2k}, D_{3k}$  находится из (57).

Результаты расчетов по формулам (50), (57) приведены на рис. 1 – 4. Их анализ позволяет заключить, что при малых значениях чисел  $Fo_1$  и  $Fo_2$  ( $Fo_1 = Fo_2 = 10^{-7}$ ) получаемые решения в диапазоне чисел  $10^{-6} \leq Fo < \infty$  полностью совпадают с решением аналогичной задачи для параболического уравнения (2) (см. рис. 1, 2). При  $Fo < 10^{-6}$  распределение температуры во времени имеет следующие особенности.

При малых значениях величины  $Fo_2$  ( $Fo_2 = 10^{-20}$ ), то есть когда последние слагаемые в правой и левой части уравнения (25) становятся пренебрежимо малы, например, при  $Fo = 2 \cdot 10^{-8}$  ( $Fo_1 = 10^{-7}$ ) температура тела в окрестности точки  $\xi = 1$  скачкообразно изменяется от величины  $\Theta(1; 2 \cdot 10^{-8}) = 0$  непосредственно при  $\xi = 1$  (выполнение граничного условия первого рода вида (30)) до  $\Theta(0,9999; 2 \cdot 10^{-8}) = 0,88$  в точке  $\xi = 0,9999$ , то есть на некотором малом расстоянии от точки  $\xi = 1$ . Таким образом, при  $Fo = 2 \cdot 10^{-8}$  по всей толщине прогретого слоя ( $0,9995 \leq \xi \leq 0,9999$ )

температура пластины практически изменяется от  $\Theta = 0,88$  при  $\xi = 0,9999$  до  $\Theta = 1$  при  $\xi = 0,9995$ , в то время как при  $\xi = 1$   $\Theta(1; 2 \cdot 10^{-8}) = 0$  (см. рис. 2). Аналогичное распределение температуры имеет место и для других чисел  $Fo < 10^{-6}$ . Для чисел  $Fo$ , при которых происходит скачок в окрестности точки  $\xi = 1$ , каких либо совпадений с решением параболического уравнения не обнаруживается. С увеличением числа  $Fo_1$  (при неизменном числе  $Fo_2 = 10^{-20}$ ) скачкообразное изменение температуры в окрестности точки  $\xi = 1$  наблюдается уже для бóльших чисел  $Fo$  (см. рис. 3, 4). Для бóльших чисел  $Fo$  совпадение с решением параболического уравнения имеет место лишь для тех чисел  $Fo$ , при которых скачок температуры в окрестности точки  $\xi = 1$  не наблюдается, то есть температурная кривая исходит из точки  $\Theta = 0$  при  $\xi = 1$  (например, все кривые для  $Fo \geq 0,005$ , приведенные на рис. 3).

При дальнейшем увеличении числа  $Fo_1$  ( $Fo_2 = 10^{-20}$ ) температурные кривые становятся более пологими и при  $Fo_1 > 20$  – практически параллельными оси  $\xi$  (см. рис. 4). Скачок температуры в окрестности точки  $\xi = 1$  в этом случае имеет место практически для всех чисел  $Fo$  вплоть до наступления стационарного состояния.

### Обозначения

$T$  – температура;  $t$  – время;  $x$  – координата;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $\tau_r$  – коэффициент релаксации (время релаксации);  $\tau$  – касательное напряжение;  $\mu$  – динамическая вязкость;  $u$  – скорость;  $y$  – координата;  $\tau_p$  – коэффициент релаксации;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $J_i$  – поток субстанции (тепла, массы и т. д.);  $X_k$  – термодинамические движущие силы (для одномерной задачи  $X = \partial T / \partial x$ );  $L_i^{(r)}$ ,  $L_{ik}$ ,  $L'_{ik}$  – постоянные феноменологические коэффициенты;  $c$  – теплоемкость;  $\gamma$  – плотность;  $\tau_1, \tau_2$  – времена релаксации процесса, характеризующие реакцию вещества на изменение потока тепла и градиента температуры;  $T_0$  – начальная температура;  $T_{ст}$  – температура пластины при  $x = \delta$ ;  $\delta$  – половина толщины пластины;  $\varphi', \varphi'', \varphi'''$  – первая, вторая и третья производные от функции  $\varphi(Fo)$  по времени  $Fo$ ;  $\psi''$  – вторая производная от функции  $\psi(\xi)$  по координате  $\xi$ ;  $\varepsilon = dl_x / dy$  – деформация сдвига (относительное удлинение).

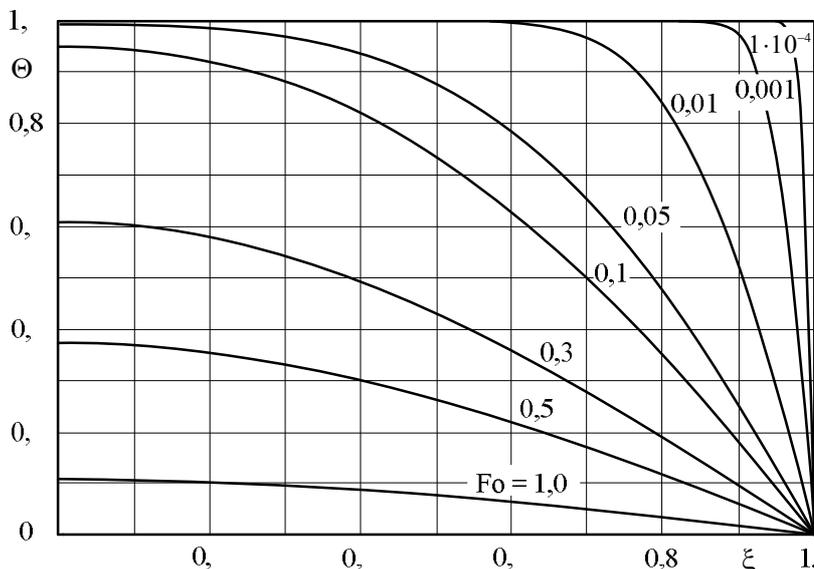


Рис. 1. Распределение температуры в пластине.  $Fo_1 = Fo_2 = 10^{-7}$ ;  $n = 10^4$  ( $n$  – число членов решений (50), (57))

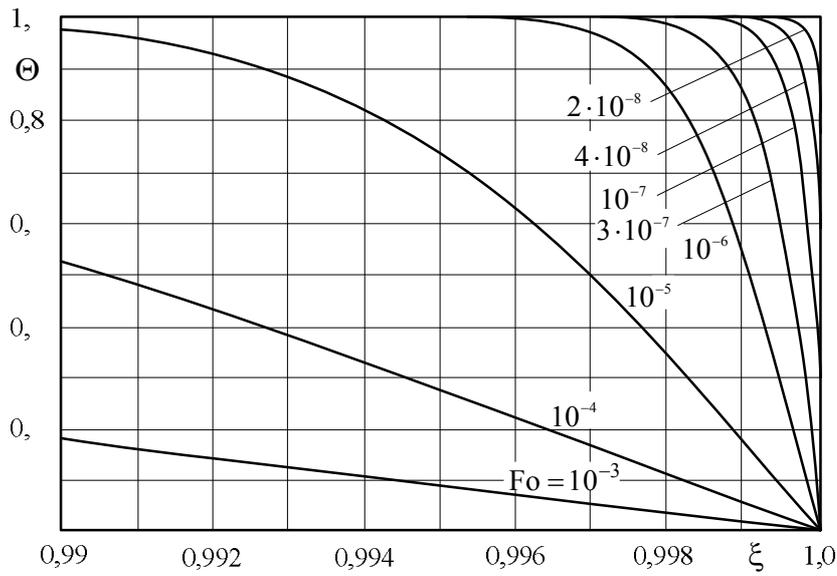


Рис. 2. Распределение температуры в пластине.  
 $Fo_1 = 10^{-7}$ ;  $Fo_2 = 10^{-20}$ ;  
 $n = 10^5$

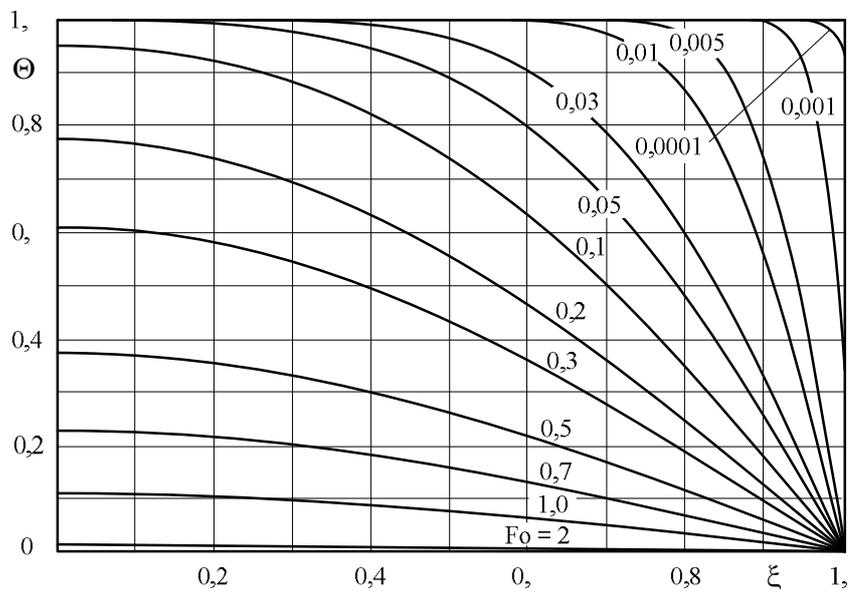


Рис. 3. Распределение температуры в пластине.  
 $Fo_1 = 10^{-3}$ ;  $Fo_2 = 10^{-20}$ ;  
 $n = 10^4$

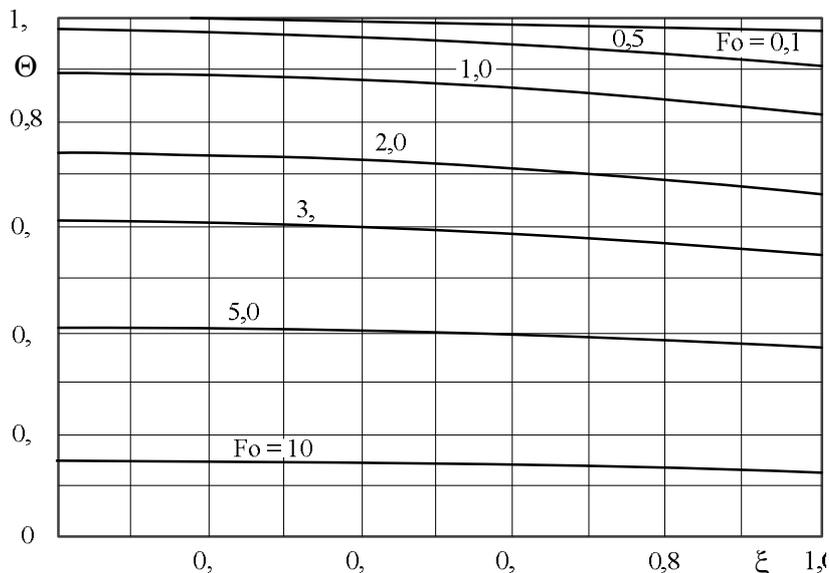


Рис. 4. Распределение температуры в пластине.  $Fo_1 = 5$ ;  $Fo_2 = 10^{-20}$ ;  $n = 10^4$

## Литература

1. Cattaneo C. Comptes Rendus. 1958. Vol. 247, № 4. P. 431 – 433.
2. Vernott P. Comptes Rendus. 1958. Vol. 246, № 22. P. 3154, 3155.
3. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена. Инженерно-физический журнал. Т. 9. № 3, 1965. С. 287 – 304.
4. Лыков А.В. Теплообмен: (Справочник). 2-ое изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1978. 480 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учеб. пос. для вузов. 7-ое изд. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
6. Шапков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. Изд. 2-ое, доп. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
7. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика»: Институт компьютерных исследований, 2006. 528 с.
8. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов. Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. физ. мат. науки. № 5 (21). Самара, 2010. С. 159 – 169.
9. Баумейстер К., Хамилл Т. Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле. Теплопередача, 1969. № 4. С. 112 – 119.
10. Бровкин Л.А. К решению дифференциального уравнения теплопроводности. Изв. вузов СССР. Энергетика, № 8, 1984. С 111 – 113.
11. Карташов Э.М. Краевые задачи для гиперболических моделей переноса. Вестник МИТХТ, 2008. Т. 3, № 3. С. 20 – 22.
12. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашиников В.В. Аналитические решения задач теплообмена и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высшая школа, 2005. 430 с.
13. Кирсанов Ю.А. Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухопрогревателях. М.: Физматлит, 2007. 240 с.

14. *Цой П.В.* Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. М.: Изд-во МЭИ, 2005. 568с.
15. *Цирельман Н.М.* Прямые и обратные задачи тепломассопереноса. М.: Энергоатомиздат, 2005, 392 с.
16. *Никитенко Н.И.* Исследование нестационарных процессов тепло- и массообмена методом сеток. Киев. «Наукова думка». 1971. 266 с.
17. *Oldroyd J.G.* Proc. Roy. Soc. A 218, 172, 1953.
18. *Темкин А.Г.* Обратные методы теплопроводности. М.: Энергия, 1973. 464 с.
19. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
20. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта. Известия АН. Энергетика, № 1, 2012. С. 119 – 133.
21. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки. Теплофизика высоких температур. Т. 50. № 1, 2012. С. 118 – 125.
22. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты. Теплофизика высоких температур. № 4, 2012.