УДК 539.3.01+532.12

# АНАЛИЗ СКРЫТЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ НАВЬЕ - СТОКСА


**В.А. Бударин**

*Одесский национальный политехнический университет, Украина*


В систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена входят уравнения Навье-Стокса, которые не удается проинтегрировать, что негативно влияет на расчет всего процесса теплопереноса.

Рассмотрим некоторые особенности процесса вывода системы Навье-Стокса и полученных результатов.

1.В соответствии с известной классификацией уравнений, система Навье-Стокса является нелинейной и если ее решить, то полученные интегралы будут, в общем случае, нелинейно зависеть от координат и времени. При выполнении осреднения нелинейной функции также необходимо использовать нелинейное уравнение, аналогично тому как это осуществляется в технической термодинамике для расчета среднетермодинамической температуры или в теории теплообмена, для расчета температурных полей в процессе теплопроводности или темперутурного напора при расчете теплообменных аппаратов [1,2].

Какое нелинейное уравнение необходимо использовать в общем случае для осреднения, например давления, неизвестно, но каким бы ни было это уравнение, оно всегда имеет следующий частный случай. При уменьшении интервала осреднения, расчет по точному уравнению совпадает со среднеарифметическоим значением. В процессе вывода уравнений Навье-Стокса используется именно такое уравнение, т.е.

$$\overline{p} = \frac{1}{3}\left(p_x + p_y + p_z\right) \tag{1}$$

где $\overline{p}$, $p_x$, $p_y$, $p_z$ - среднее давление и компоненты давления в точке вязкой жидкости, соответственно.

На неясность данного уравнения указывается в работе [3], однако далее вопрос не рассматривается. Характерно, что в доступной литературе в приведенной формуле используется знак точного равенства, вместо требуемого приближенного, а последствия использования линейной зависимости (1) для описания нелинейного процесса течения не обсуждаются.

2.Вместе с тем, малый интервал осреднения нелинейной зависимости, при котором выполняется уравнение (1), приводит к незначительным отличиям между $\overline{p}$, $p_x$, $p_y$, $p_z$. Это, в свою очередь, накладывает ограничение на слагаемые, связывающее среднее давление с давлением в точке в любом направлении, которые для несжимаемой жидкости имеют вид

$$p_x = \overline{p} - 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$p_y = \overline{p} - 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$p_z = \overline{p} - 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

В результате получаем, что например величина $2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\approx 0$ или скорость во всех направлениях должна меняться незначительно. Такой результат указывает, что ограничение для известных точных решений ситемы Навье-Стокса малыми числами Рейнольдса связано не со свойством частных задач, а со скрытыми свойствами самих дифференциальных уравнений. Различие между предельными числами Рейнольдса, при которых еще существует решение частной задачи, можно обьяснить разной нелинейностью самого процесса течения в той или иной задаче.

3.В результате анализа системы Навье-Стокса установлено, что влияние сил вязкого трения учитывается слагаемым $\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$ [3]. Анализ физического смысла выражений в скобках показывает, что первое слагаемое характеризует инерцию процесса течения, а вторые два – влияние сдвига скорости. Таким образом, в соответствии с приведенным слагаемым, силы вязкого трения имеют смешанную природу (инерционную и сдвиговую), в то время как в соответствии с законом Ньютона, входящим в постановочную часть уравнений движения, они имеют только сдвиговую природу. Такое противоречие существенно влияет на расчет процесса течения вязкой жидкости.

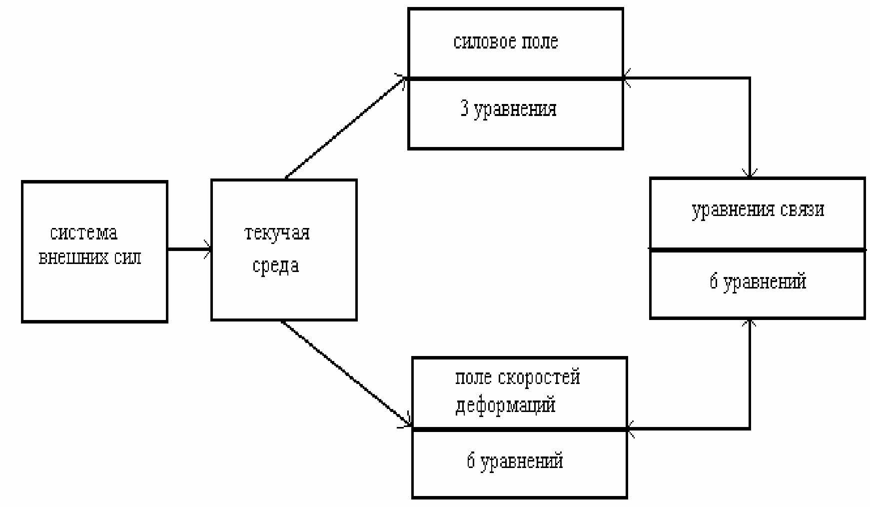
Необходимо отметить, что исключение слагаемых, характеризующие инерционное влияние, например $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$, приводит к положительным результатам расчета течения в теории пограничного слоя [3,5]. Причиной такого противоречия является использование понятия поля скоростей деформации для характеристи другого (силового) поля. Таким понятием является скорость угловой деформации частицы, которое используется для получения системы Навье-Стокса. Такое смешение понятий и уравнений, относящихся к разным физическим полям, отридцательно влияет на конечный результат и делает маловероятной возможность использования системы Навье-Стокса в качестве универсального математического инструмента для расчета движения ньютоновской жидкости.

4.Перечисленные свойства основаны на анализе извстных уравнений, но не отвечают на вопрос о более корректных путях описания задачи течения ньютоновской (и неньютоновской) жидкости.

Для ответа на этот вопрос необходимо уточнить задачи расчета процесса течения, причем не только ньютоновской жидкости, а и любой среды, обладающей свойством текучести. В настоящее время основной целью расчета течения считается нахождение распределения давления, в то время как при движении жидкости существует еще и поле перемещений частиц жидкости (или их производных), связанное с полем давлений физически и математически. Таким образом, цель расчета распадается на несколько задач, которые сводятся к задачам расчета как минимум двух полей – поля напряжений и поля скоростей.

Проблематичность использования системы Навье-Стокса для расчета только поля давлений в ньютоновской жидкости ставит вопрос о разработке других методов расчета, имеющих меньшее количество ограничений. Рассмотрим возможные пути расчета в рамках метода Лагранжа.

Проведем физический анализ задачи течения жидкости полагая, что при этом возникают два поля – силовое, характеризуемое известным набором сил и поле перемещений частиц жидкости, обусловленное наличием текучести (фиг. 1). Такое поле, также как и силовое поле, характеризуется своим набором свойств [3].




Фиг.1 Физические поля и соответствующие системы уравнений

На фиг. 1 показано, что силовое поле должно характеризоваться системой из трех уравнений, т.к. главный вектор силы можно разложить на три составляющих. Поле скоростей деформаций должно характеризоваться системой из шести уравнений, т.к. в таком поле возникают два виде перемещений – линейные и угловые, а каждый главный вектор также может быть разложен на три составляющих. Так как свойства обеих полей жестко связаны между собой, должна также существовать система уравнений связи, позволяющая пересчитывать параметры одного поля в параметры другого поля.
Приведенная схема на фиг. 1 показывает, что расчет процесса течения можно проводить тремя различными способами. Первый - (основной) включает систему из девяти уравнений, в которую входят три уравнения силового поля и шесть уравнений поля скоростей деформаций, второй – включает систему из девяти уравнений, в которую входят три уравнения силового поля и шесть уравнений связи, третий – включает систему из 12 уравнений, в которую входят шесть уравнений поля скоростей деформаций и шесть уравнений связи. Необходимо отметить, что второй и третий способы являются менее общими и могут использоваться в частных задачах для решения которых достаточно только уравнений силового поля или поля скоростей деформаций.
В приведенной схеме система уравнений силового поля известна и называется уравнениями движения в напряжениях, которая содержит девять неизвестных величин. Таким образом, первый метод расчета дает замкнутую систему уравнений, которая должна быть дополнена системой из трех реологических уравнений для характеристики механических свойств неизотропной среды. В случае изотропной среды, например ньютоновской, такое уравнение будет одно.
На фиг. 2 представлена схема связей между различными уравнениями движения сплошной среды на примере системы уравнений в напряжениях (2).

$$X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)=\frac{du_x}{dt}$$

$$Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)=\frac{du_y}{dt} \qquad (2)$$

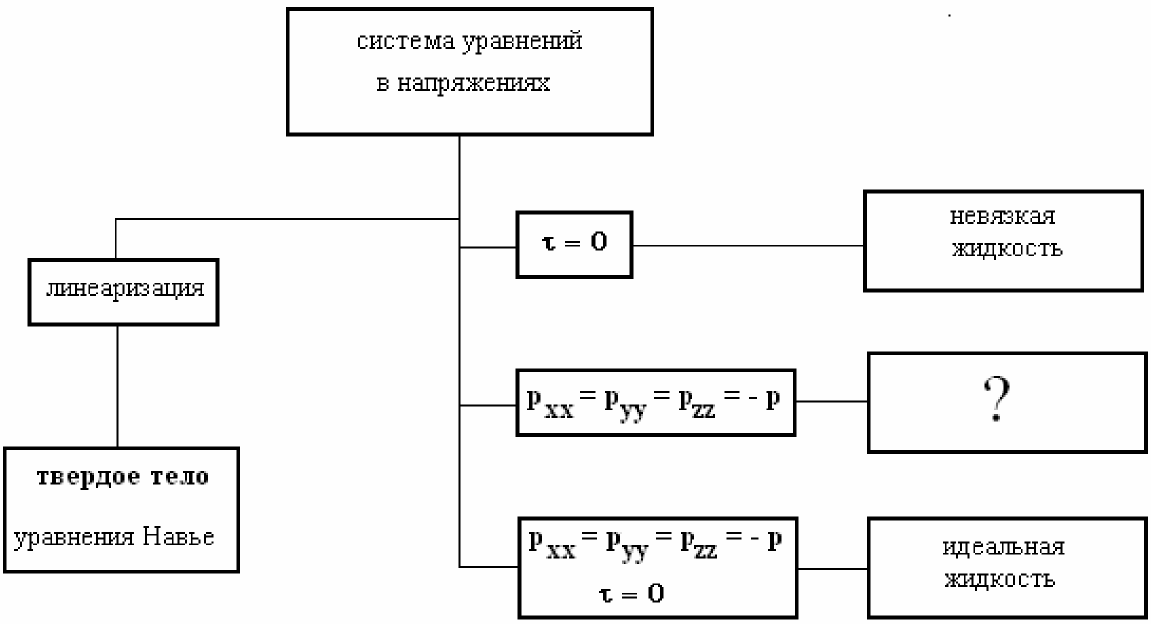
$$Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)=\frac{du_z}{dt},$$

где $p_{xx}$, $p_{yy}$, $p_{zz}$, $\tau_{ij}$ – проекции нормальных и касательных напряжений, $u_x$, $u_y$, $u_z$ - проекции скорости потока, $X$, $Y$, $Z$ - проекции удельной массовой силы.

В зависимости от условий система (2) распадается на четыре частных случая. При линеаризации, из системы (2) исключаются конвективные ускорения в правой части она становится линейной и используется в теории упругости под названием системы Навье [4]. При исключении из (2) сил вязкого трения, получаем систему (3), которая характеризует модель невязкой жидкости.

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt} \\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt} \\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

При использовании двух условий ( $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = - p$ и $\tau = 0$) получаем систему уравнений Эйлера, которая характеризует модель идеальной жидкости [3].




Фиг. 2. Некоторые частные случаи уравнений движения в напряжениях

При использовании условия независимости нормальных напряжений от ориентации элементарной площадки в присутствии сил вязкости ($\tau \neq 0$), получим систему, которая еще не получила корректной физической трактовки.

Данная схема позволяет оценить общность каждой системы уравнений. Так как система (2) является наиболее общей, она содержит все решения для сплошного и разрывного течения. Аналогично, система (3) содержит такие же решения для невязкого течения, а система уравнений Эйлера содержит решения только для сплошных течений без сил вязкого трения, т.е. охватывает весьма узкий класс задач.

Реализация излагаемой точки зрения проверена на примерах частных задач в рамках моделей невязкой и вязкой жидкости, изложенных в работе [5]. В качестве таких задач выбрано течение в несжимаемой и политропной вихревой трубке конечных размеров вдали от стенки.

В рамках модели вязкой жидкости там же рассматривается пристеночное течение, возникающее в результате торможения на плоскости торца вихревой трубки.

Для использования рассмотренных методов требуется уточнение данной математической модели в части системы уравнений для расчета поля скоростей деформаций и системы уравнений связи. При этом, так же как и в системе (2), требуется учитывать влияние температуры и давления на удлинение и поворот вектора перемещений частицы жидкости. После такого уточнения данную модель течения можно реализовать в форме компьютерных программ. В настоящее время расчет течений выполняется с помощью только системы (2), что явно ограничивает потенциальные возможности рассмотренной модели.

**Литература**

[1] Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика. М., Энергоиздат, 1983. – 416 с.
[2] Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.А.Теплопередача. Энергоиздат, М., 1981. – 417с.
[3] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5, переработанное, ГРФМЛ издательство Наука, М., 1978. – 736 с.
[4] Работнов Ю.Н. Механика деформированного твердого тела. Учебн. Пособие для вузов. – 2-е изд., - М., Наука, ГРФМЛ, 1988. – 712 с.
[5] Бударин В.А. Метод расчета движения жидкости.– Одесса: Астропринт, 2006. – 140 с.