УДК 532.542.4

МЕХАНИЗМ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ, ТРУБАХ

Э. А. Буланов

При рассмотрении течения в каналах, трубах переход от ламинарного течения в турбулентное предлагается рассматривать, как следствие наступления вращения элементов объема под действием момента касательных напряжений. На основе вращения элемента объема жидкости, предложен механизм турбулентного перемешивания с учетом переноса пульсационной составляющей скорости, при котором касательные напряжения изменяются по линейному закону. Предложен критерий перехода ламинарного течения в турбулентное. Приведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: *турбулентность; течение в каналах, трубах; число Рейнольдса; механизм перемешивания.*

Современный подход к переходу ламинарного течения в турбулентное [1, 2], связан с потерей устойчивости течения при наличии малых возмущений. В предлагаемом исследовании сделано предположение, что этот переход связан с превышением момента касательных напряжений некоторого предельного значения. При анализе развитого турбулентного течения используется механизм турбулентного перемешивания Буссинеска-Прандтля [1, 2], применяя который к течению вблизи стенки, где касательное напряжение можно считать постоянным и равным напряжению на стенке, получается логарифмический профиль скорости осредненного движения. Однако при течении жидкости по каналам, трубам касательное напряжение изменяется по линейному закону. В предлагаемом исследовании рассмотрен механизм турбулентного перемешивания, соответствующий линейному закону изменения касательных напряжений.

Рассмотрим деформацию элемента объема жидкости при течении в канале с параллельными стенками на расстоянии $2h$ (*рис*. 1).

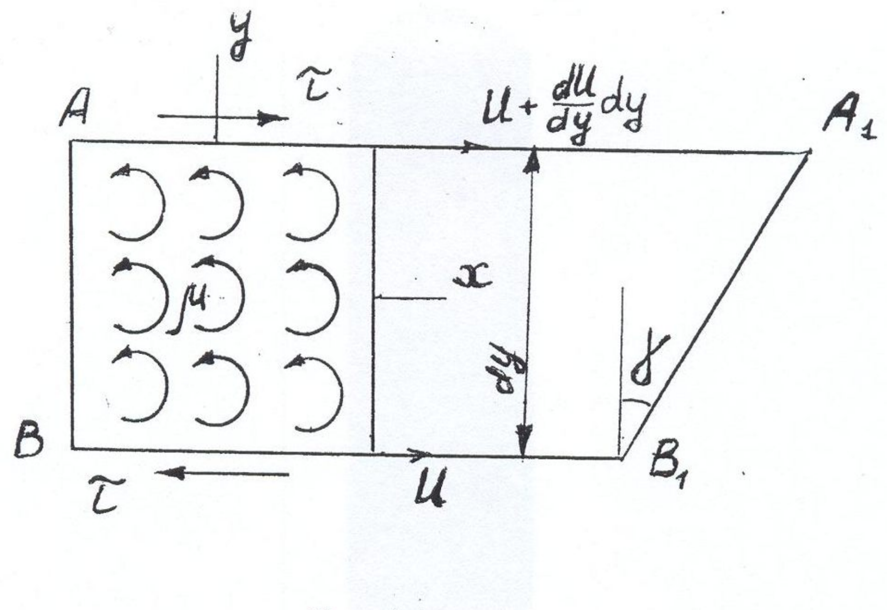

Рис. 1

В начальный момент (при $t = 0$) грань $AB = dy$ – вертикальна, но по прошествии времени t грань AB займет положение A_1B_1. Перемещение точки B: $S_{(B)} = U \cdot t$, перемещение точки А: $S_{(A)} = \left(U + \frac{dU}{dy}dy\right) \cdot t$, где $U = U(y)$ – скорость жидкости. Угол сдвига γ определяется из геометрии:

$$tg\gamma = \frac{S_{(A)} - S_{(B)}}{AB} = \frac{dU}{dy} \cdot t.$$

Очевидно, при $t \to \infty$: $tg\gamma \to \infty$; $\gamma \to \frac{\pi}{2}$.

В начальный момент $\gamma = 0$ и производная:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dU}{dy} = \omega.$$

Величина ω есть значение угловой скорости элемента объема в данный момент – мгновенное значение угловой скорости. На элемент объема жидкости действует момент пары сил от касательных напряжений, который стремится создать вращение. До некоторого предельного значения этого момента – вращения нет, происходит плоскопараллельное движение (ламинарное течение). Если момент пары от касательных напряжений превышает это предельное значение, то элемент объема начинает вращаться, течение переходит в турбулентное.

Рассмотрим установившееся турбулентное течение. Распределение напряжения трения по сечению канала:

$$\tau = \tau_{\omega} \cdot (1 - \overline{y}) = \rho \cdot v_*^2 \cdot (1 - \overline{y}), \qquad (1)$$

где $v_* = \sqrt{\frac{\tau_{\omega}}{\rho}}$ – динамическая скорость, $\overline{y} = \frac{y}{h}$, τ_w – напряжение на стенке.

Согласно схеме турбулентного перемешивания Буссинеска-Праидтля при турбулентном течении происходит перенос количества движения. При осреднении по Рейнольдсу не учитывается перенос количества движения пульсационной составляющей скорости. За переносимую величину – можно принять размах колебаний скорости: $2\rho u_1$, где $u_1 = \sqrt{u'^2}$, а $\sqrt{u'^2}$ – осредненная амплитуда пульсационной составляющей.

Турбулентное перемешивание представим в виде вращения элементов объема. Если вращающийся элемента объема имеет радиус $l = l(y)$, то окружная скорость вращения $V' = l \cdot \omega$, где $\omega = \frac{\partial U}{\partial y}$.

Согласно схеме Буссинеска-Прандтля количество движения, перенесенное с верхнего слоя AB – положительно, а с симметрично расположенного нижнего слоя A_1B_1 – отрицательно (*рис*. 2). При механизме переноса в результате вращения это объясняется тем, что импульсы сил от касательных напряжений для этих двух слоев обратные по знаку. Скорость переноса – $V'\sin\varphi$.

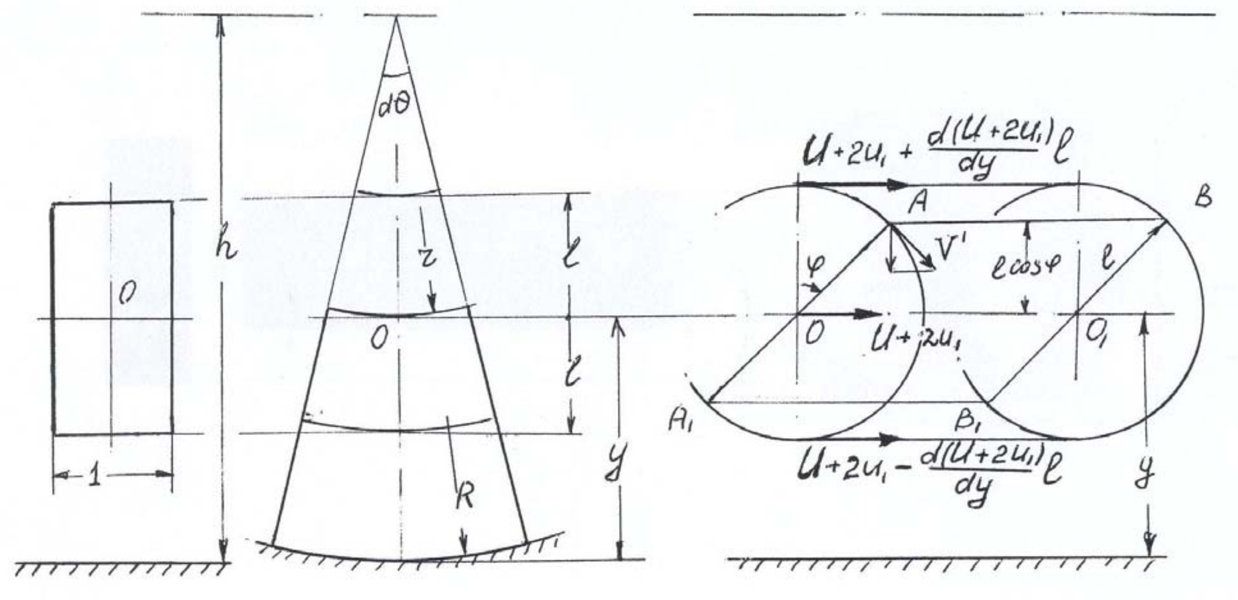

Рис. 2

Касательные напряжения турбулентного трения с учетом переноса пульсационной составляющей:

$$\tau = -\rho \cdot \overline{u'v'} = -2\rho \int\limits_0^{\pi/2} V'\sin\varphi \cdot \left(\frac{dU}{dy} + 2 \cdot \frac{du_1}{dy} \right) \cdot l \cdot \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \rho V' \cdot l \cdot \left(\frac{dU}{dy} + 2 \cdot \frac{du_1}{dy} \right). \qquad (2)$$

Подставляя $V' = \dfrac{dU}{dy} \cdot l$ и приравняв выражения (1) и (2), получим:

$$l^2 \cdot \frac{dU}{dy} \cdot \left(\frac{dU}{dy} + 2 \cdot \frac{du_1}{dy} \right) = v_*^2 \cdot \left(1 - \frac{y}{h} \right). \qquad (3)$$

Для течения в круглой трубе радиуса *R* площадь верхнего и нижнего слоев определяется как $(r - l\cos\varphi) \cdot AB \cdot d\theta$, где $r = R - y$. (*рис*. 2). Схема Буссинеска-Прандтля не приводит к уравнению (2). Но, если принять механизм вращения, то из уравнения сохранения расхода:

$$V' = -l \cdot \frac{dU}{dr} \cdot \frac{r}{(r - l\cos\varphi)},$$

тогда получим и для течения в трубе уравнения (2) и (3).

Из уравнения (3) следуют два других уравнения:

$$l \cdot \frac{dU}{dy} = v_* \,, \tag{4}$$

$$2 \cdot \frac{dU}{dy} \cdot \frac{du_1}{dy} = -\frac{v_*^2}{l^2} \cdot \frac{y}{h} \,. \tag{5}$$

Уравнение (4) дает известное решение для скорости жидкости в области развитого турбулентного течения при $l = \chi \cdot y$

$$\frac{U_m - U}{v_*} = \frac{1}{\chi} \cdot \ln\left(\frac{h}{y}\right), \tag{6}$$

а также из уравнения (4) следует, что $V' = v_*$ и не зависит от y.

Из уравнения (5), т.к. $\dfrac{dU}{dy} = \dfrac{v_*}{l}$, получим при $l = \chi \cdot y$

$$\frac{du_1}{dy} = -\frac{v_*}{2l} \cdot \left(\frac{y}{h}\right) = -\frac{v_*}{2\chi} \cdot \frac{1}{h} \,.$$

В результате, т.к. на оси канала, трубы $\tau = 0$, продольная пульсационная составляющая скорости, определяемая турбулентным перемешиванием, равна

$$\sqrt{u_{\mathrm{T}}'^2} = 1{,}25 v_* \left(1 - \bar{y}\right).$$

Само вращение элемента объема создает пульсации скорости. С учетом равновероятного их расположения в объеме в любой точке объема возникают пульсации скорости равновероятно направленные под различными углами с амплитудой $V' = v_*$.

Таким образом, пульсационные составляющие, определяемые вращением элемента $\sqrt{v'^2} = \sqrt{u_{в}'^2} = v_*$ не зависят от координаты y. Причем при вращении они не изменяют количества движения, т.к. $\dfrac{dv_*}{dy} = 0$.

Суммарно пульсационные составляющие в потоке:

$$\sqrt{u'^2} = v_* \left(2{,}25 - 1{,}25 \bar{y}\right); \qquad \sqrt{v'^2} = v_* \,. \tag{7}$$

Результаты измерения пульсационных составляющих скорости $\sqrt{u'^2}$ и $\sqrt{v'^2}$, в зависимости от безразмерной координаты $\bar{y}$, представлены на *рис*. 3, 4. Там же представлены прямые, соответствующие (7). Как видно из сравнения, предлагаемая модель турбулентного течения качественно довольно верно описывает реальный процесс. Уменьшение $\sqrt{v'^2}$ при $\bar{y} > 0{,}4$ (*рис*. 4) можно объяснить случайным характером отклонения плоскости вращения.

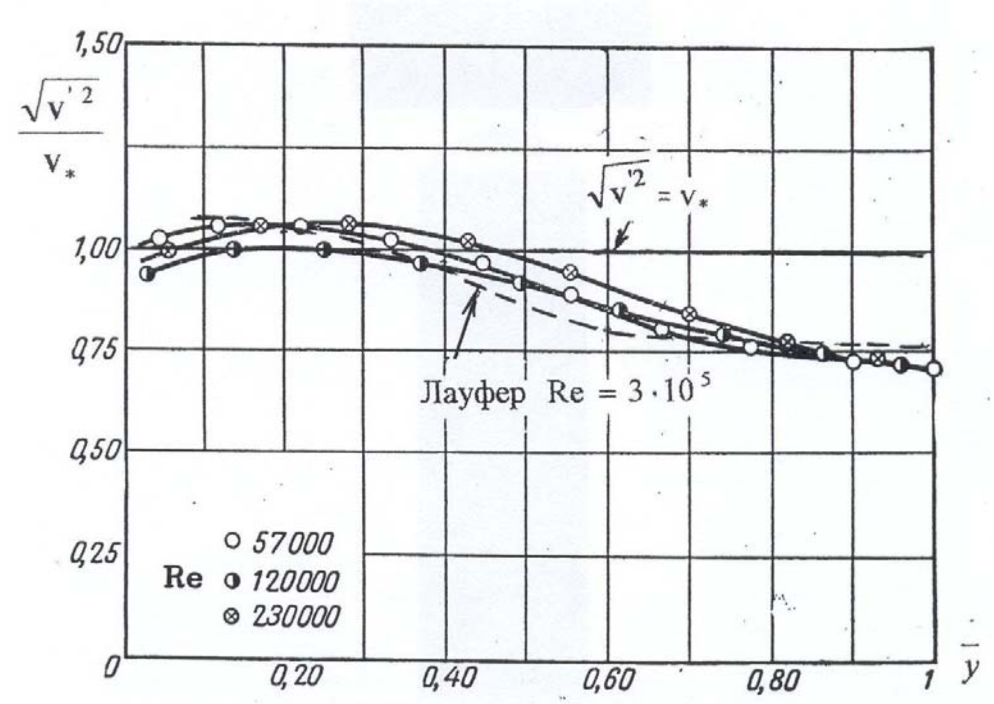

Рис. 3

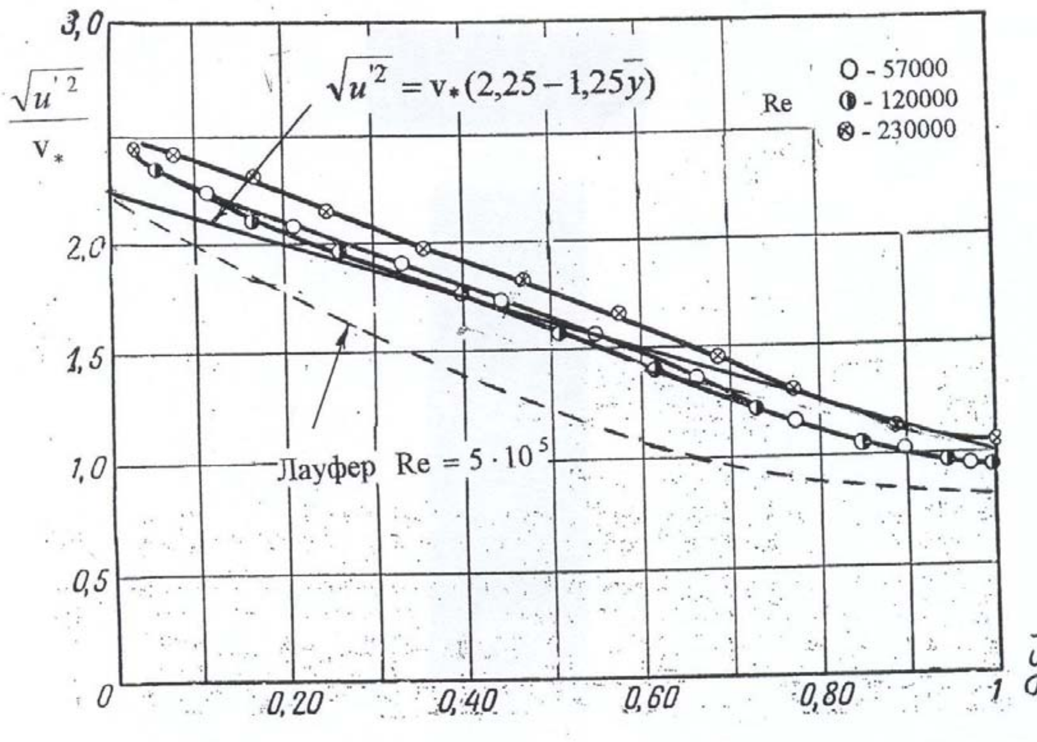

Рис. 4

Определим коэффициент корреляции $R = \dfrac{\overline{u'v'}}{\sqrt{u'^2} \cdot \sqrt{v'^2}}$. Так как $\overline{u'v'} = -\tau / \rho = -v_*^2 \cdot \left(1 - \bar{y}\right)$, а $\sqrt{u'^2} = v_* \cdot \left(2{,}25 - 1{,}25\bar{y}\right)$, $\sqrt{v'^2} = v_*$, то

$$R = -\frac{1-\bar{y}}{2{,}25-1{,}25\bar{y}}. \tag{8}$$

Расчеты коэффициента корреляции по этой формуле представлены на *рис*. 5, там же представлены результаты экспериментального исследования [3] по определению коэффициента корреляции. Сравнение показывает на удовлетворительное соответствие расчетов и данных эксперимента.

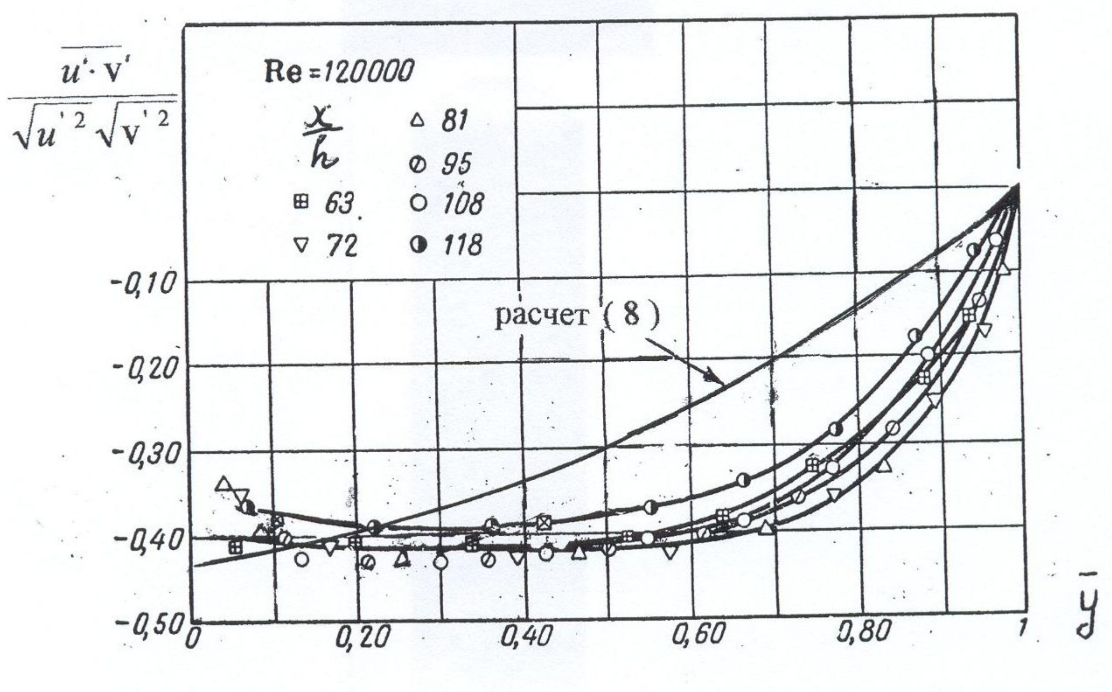

Рис. 5

При рассмотрении течения в трубах экспериментальные данные Лауфера [4] качественно совпадают с данными Конт-Белло. Для примера на *рис*. 3, 4 приведены данные Лауфера по распределению пульсационных составляющих скорости.

Рассмотрим область пристеночного течения – ламинарный подслой. Вследствие малости его толщины δ_0 в этой области $\tau \approx \tau_w = const$. При $l = l_*$, где l_* – динамическая длина [2] и $\tau = \tau_w$ из (3) следует, что в области ламинарного подслоя зависимость U и u_1 от y можно представить в виде $U = k \cdot \frac{v_*}{l_*} y$ и $u_1 = k_1 \cdot \frac{v_*}{l_*} y$. Тогда из (3) получим уравнение

$$k^2 + 2k \cdot k_1 = 1.$$

Амплитуда пульсационной составляющей скорости на границе ламинарного подслоя при $y = \alpha \cdot l_*$ $u_1 = 2{,}25 v_*$ (8), откуда $k_1 = \frac{2{,}25}{\alpha}$. Тогда

$$k = \sqrt{1+\frac{5{,}06}{\alpha^2}} - \frac{2{,}25}{\alpha}. \tag{9}$$

Скорость U на границе ламинарного подслоя: $U = k\alpha v_*$.

В результате в ламинарном подслое:

$$\sqrt{u'^2} = 2{,}25 v_* \frac{y}{\alpha l_*}. \tag{10}$$

Если при $y > \delta_0$, $l = l_* + \chi(y - \delta_0)$, то решение уравнения (4) при граничных условиях: при $y = h$ $U = U_m$

$$U = U_m + \frac{v_*}{\chi} \ln\left(\frac{l_*(1-\alpha\chi) + \chi y}{l_*(1-\alpha\chi) + \chi h} \right) \tag{11}$$

Так как при $y = \alpha l_*$ $U = k\alpha v_*$, то из (11) получим уравнение для определения константы α

$$\frac{U_m}{v_*} = k\alpha + \frac{1}{\chi} \ln\left(1 - \alpha\chi + \chi \frac{h}{l_*} \right). \tag{12}$$

Для течения в трубе, согласно экспериментальным данным [2], $U_m = U_{cp} + 4{,}08 v_*$, где $U_{cp} = \frac{2\sqrt{2} v_*}{4\sqrt{\lambda}}$ – средняя скорость жидкости в трубе, λ – коэффициент сопротивления. Тогда уравнение (12) при $\chi = 0{,}4$ примет вид

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} + 4{,}08 = k\alpha + 2{,}5 \ln\left(1 - 0{,}4\alpha + 0{,}4 \frac{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}} \right), \tag{13}$$

где $\mathrm{Re} = \frac{U_{cp} 2R}{\nu}$.

Подставляя для λ эмпирические формулы Блазиуса $(\lg \mathrm{Re} \le 5)$ и Никурадзе $(\lg \mathrm{Re} \ge 5)$ из (12) и (9), получим

при $\lg \mathrm{Re} = 3{,}6$, $\alpha = 10{,}4$, $k = 0{,}807$,

при $\lg \mathrm{Re} = 3{,}8$, $\alpha = 10{,}1$, $k = 0{,}802$,

при $\lg \mathrm{Re} \ge 4$, $\alpha = 10$, $k = 0{,}8$.

Из (12), (11) следует универсальный закон распределения скорости при $y > \delta_0$

$$\frac{U}{v_*} = k\alpha + 2{,}5 \cdot \ln\left[0{,}4 \cdot \left(\frac{y}{l_*} \right) + 1 - 0{,}4\alpha \right]. \tag{14}$$

При $\alpha = 10$ и $y >> \delta_0$ $\frac{U}{v_*} = 5{,}75 \lg\left(\frac{y}{l_*} \right) + 5{,}709$, что практически совпадает с известным универсальным логарифмическом законом [2]. Отличие в постоянной на 0,209 укладывается в разброс экспериментальных данных [2].

В ламинарном подслое при $y \le \delta_0$

$$\frac{U}{v_*} = 0{,}8\frac{y}{l_*}. \qquad (15)$$

Расчет $\frac{U}{v_*}$ при $y < 3 \cdot l_*$ по формулам (14) и (15) (сплошная линия) дает хорошее соответствие с экспериментальными данными Лауфера, Вигхарда, Тсуджи и Морикава [2] (*рис*. 6).

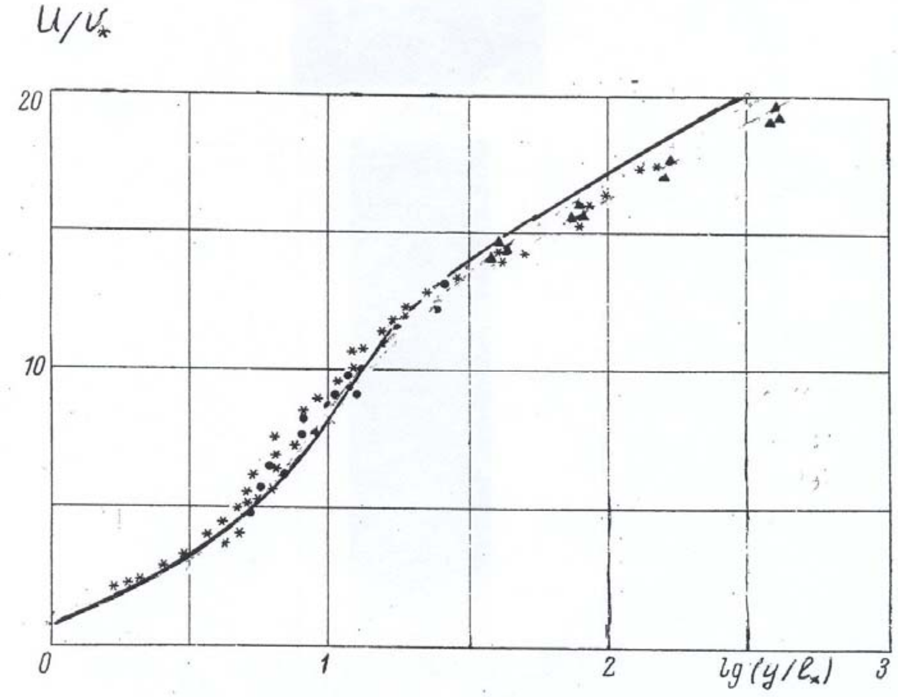

Рис. 6

Для течения в канале с параллельными стенками [3], подставляя в (12) значения U_m, v_* при $\nu = 0{,}15 \cdot 10^{-4}\, м^2/с$, получим

при $\mathrm{Re} = 57000$, $\alpha = 11{,}9$, $k = 0{,}829$,

при $\mathrm{Re} = 120000$, $\alpha = 11$, $k = 0{,}82$,

при $\mathrm{Re} = 230000$, $\alpha = 13{,}3$, $k = 0{,}84$, откуда средние значения $\alpha = 12$, $k = 0{,}83$.

Из уравнения (5) при законе изменения скорости согласно (14) получим, что

$$\sqrt{U_{\mathrm{T}}'^2} = 1{,}25\left[\left(1-\bar{y}\right) - \frac{5{,}5}{\mathrm{Re}_*}\ln\left(\frac{0{,}4\,\bar{y} - \frac{3{,}8}{\mathrm{Re}_*}}{0{,}4 - \frac{3{,}8}{\mathrm{Re}_*}}\right)\right]. \qquad (16)$$

В [3] число Рейнольдса $\mathrm{Re}_* = \frac{v_* h}{\nu} = 2340$, 4800, 8160. Расчеты по (16) при $y = 12 \cdot l_*$ и при вышеуказанных числах Рейнольдса дают для $\sqrt{u_{\mathrm{T}}'^2}$ соответственно следующие результаты: 1,267; 1,259; 1,254. При $y > 12 \cdot l_*$ влияние второго члена в (16) пренебрежимо мало.

Расчет продольной пульсационной составляющей скорости по (10) и (16) (пунктирная линия) при $\alpha = 12$ и $y \le 100 \cdot l_*$ и экспериментальные данные [3] приведены на *рис*. 7. Сравнение указывает на удовлетворительное соответствие расчета данным экспериментов.

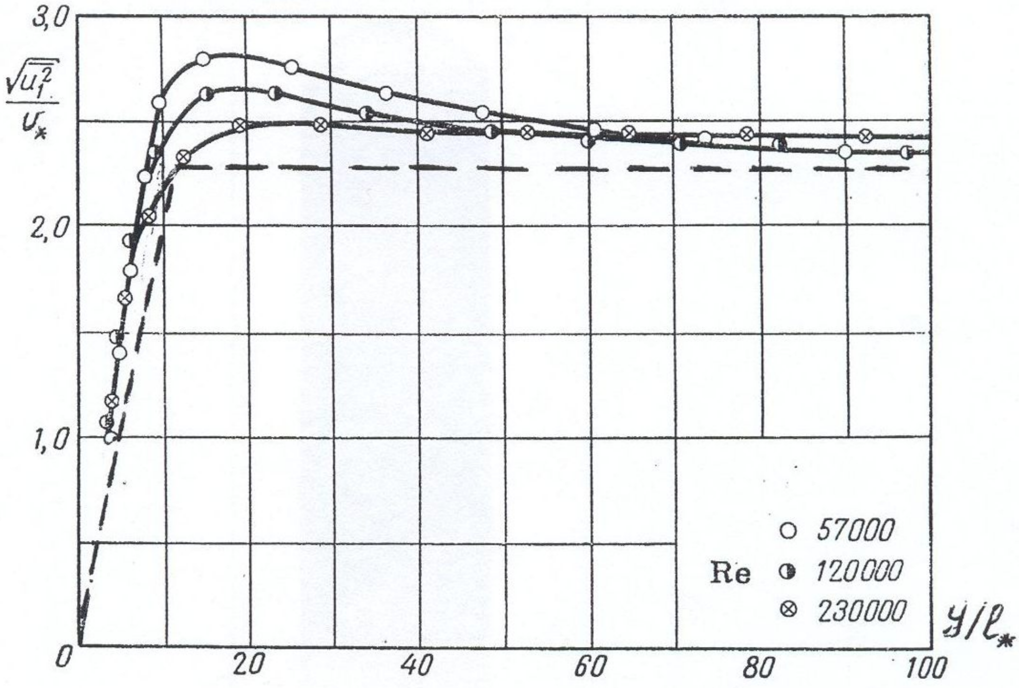

Рис. 7

Рассмотрим механизм образования турбулентности. На гранях элемента объема dx действуют касательные напряжения $\tau = \rho\nu \cdot \frac{dU}{dy}$, на гранях dy касательные напряжения равны нулю (*рис*.1). Можно предположить, что элемент объема удерживается от вращения моментными напряжениями μ, распределенными по объему, где μ – их интенсивность. Тогда уравнение равновесия (моментов) (*рис*. 1):

$$\sum M_A = \rho\nu \frac{dU}{dy} \cdot 1 \cdot dx \cdot dy - \mu \cdot 1 \cdot dx \cdot dy = 0,$$

откуда $\mu = \rho\nu \cdot \frac{dU}{dy} = \tau$.

Турбулентность возникает в пристеночной зоне течения, в которой $\tau = \tau_{\max} = \tau_w$ и затем распространяется на все сечения канала. Условие возникновения турбулентности в этой области $\tau_w \geq \mu_0$, где μ_0 – некоторое предельное значение моментных напряжений. Если принять, что

$$\mu_0 = \rho \frac{\nu^2}{\delta^2} n, \tag{17}$$

где n – эмпирическая константа, δ – толщина пограничного слоя, то условие возникновения турбулентности примет вид: $\nu_*^2 \geq \frac{\nu^2}{\delta^2} n$, откуда

$$\mathrm{Re}_{*,кр} = \frac{\nu_* \delta}{\nu} \geq \sqrt{n}.$$

Однако, возникновение «вихрей» в пристеночной зоне однозначно не определяет возникновение турбулентности во всем сечении канала. Вероятно, переход ламинарного течения в турбулентное в канале зависит от среднего значения по сечению моментных напряжений $\mu_{cp} = \tau_{cp}$, чем больше отношение τ_{cp} / τ_w, тем меньше $\mathrm{Re}_{*,кр}$.

Также можно предположить, что величина $\mathrm{Re}_{*,кр}$ зависит от влияния вязкости на профиль скорости в потоке. При отсутствии внутреннего трения скорость в потоке была бы постоянной, равной U_m. Влияние вязкости приводит к тому, что средняя скорость по сечению $U_{cp} < U_m$, а, следовательно, для скоростного напора $\rho U_{cp}^2 < \rho U_m^2$. Очевидно, что чем больше влияние вязкости, тем меньше $\mathrm{Re}_{*,кр}$.

В результате критическое число Рейнольдса при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное во всем сечении потока жидкости:

$$\mathrm{Re}_{*,кр}^2 = n \cdot \left(\frac{\tau_w}{\tau_{cp}} \right) \cdot \left(\frac{\rho U_{cp}^2}{\rho U_m^2} \right) = n \cdot \left(\frac{C_{f,w}}{C_{f,cp}} \right), \tag{18}$$

где $C_f = \frac{\tau}{\rho U^2}$ – коэффициент сопротивления.

Экспериментальные данные по определению критического числа Рейнольдса позволяет проверить справедливость ранее высказанных предположений, а, следовательно, и формулы (18).

В течении Куэтта: $\tau_w = \rho\nu \dfrac{U_m}{\delta} = const$; $U_{ср} = \dfrac{1}{2} U_m$, $\mathrm{Re}_{кр} = \dfrac{U_m \delta}{\nu} = 3\,000$ [1], тогда $\mathrm{Re}^2_{*,кр} = \left(\dfrac{v_* \delta}{\nu} \right)^2 = \left(\nu \dfrac{U_m}{\delta} \right) \dfrac{\delta^2}{\nu^2} = \dfrac{U_m \delta}{\nu} = 3\,000$, и из (18) следует, что $n = 12\,000$.

В течении в круглой трубе:

$$\tau_w = \rho\nu \frac{2 \cdot U_m}{\delta},\ \tau_{ср} = \frac{2}{3}\tau_w,\ U_{ср} = \frac{1}{2} U_m,\ \mathrm{Re}_{кр} = \frac{U_{ср} 2\delta}{\nu} = 2\,300 \text{ [1]},$$

тогда $\mathrm{Re}^2_{*,кр} = \left(\nu \dfrac{2 \cdot U_m}{\delta} \right) \dfrac{\delta^2}{\nu^2} = 4 \cdot \dfrac{U_{ср} \delta}{\nu} = 4\,600$.

Из (18) получим, что $\mathrm{Re}^2_{*,кр} = 4\,500$.

В течении между параллельными стенками:

$$\tau_w = \rho\nu \frac{2 \cdot U_m}{\delta},\ \tau_{ср} = \frac{1}{2} \cdot \tau_w U_{ср} = \frac{2}{3} \cdot U_m,\ \mathrm{Re}_{кр} = \frac{U_m \delta}{\nu} = 5\,314 \text{ [1]}.$$

Тогда $\mathrm{Re}^2_{*,кр} = \left(\nu \dfrac{2 \cdot U_m}{\delta} \right) \dfrac{\delta^2}{\nu^2} = 2 \cdot \dfrac{U_m \delta}{\nu} = 10\,628$.

Из (18) получим, что $\mathrm{Re}_{*,кр} = 10\,667$.

Таким образом, расчеты подтверждают ранее высказанные предположения о причинах перехода ламинарного течения в турбулентное.

Проведенные исследования подтверждают справедливость представления перехода ламинарного течения в турбулентное вследствие наступления вращения элементов объема жидкости под действием моментов пар сил от касательных напряжений. Представление механизма турбулентного перемешивания в результате вращения элементов объема позволяет более точно описать процесс течения жидкости в пограничном слое.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
3. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в каналах с параллельными стенками. – М.: Мир, 1968. – 176 с.
4. Хипце И.О. Турбулентность. – М.: Физматизд, 1963 – 607 с.