

ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ВОЗДУХА

В.А. Кузнецов, В.П. Кожевников

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

Дифференциальные уравнения Навье–Стокса представлены в форме, учитывающей влияние силы тяжести неизотермической среды непосредственно на каждую компоненту скорости. Предложен способ расчета слабой турбулентности при естественной конвекции. Составлена трехмерная математическая модель, разработана компьютерная программа и выполнено численное моделирование свободной конвекции воздуха в обогреваемой комнате, обладающей диагональной симметрией. Представлены распределения температуры и скорости воздуха в помещении.

Ключевые слова

Свободная конвекция воздуха, турбулентность, математическое моделирование.

Условные обозначения

c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); g – ускорение силы тяжести, м/с²; h – вертикальная координата, м; k_t – кинетическая энергия турбулентных пульсаций, Дж/кг; l – длина пути смешения, м; p , \tilde{p} – давление, Па; q – плотность теплового потока, Вт/м²; t – температура, °С; u , v , w – компоненты скорости, м/с; u_* – динамическая скорость, м/с; x , y , z – декартовы координаты, м; ε_t – скорость диссипации энергии турбулентности, Вт/кг; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); μ – динамический коэффициент вязкости, Па·с; ν – кинематический коэффициент вязкости, м²/с; ρ – плотность, кг/м³; τ – время, с; c_μ – эмпирический коэффициент, f_k , f_μ – поправочные функции, A_+ , κ – параметры длины пути смешения, $u_+ \equiv u/u_*$, $y_+ \equiv yu_*/\nu$, $l_+ \equiv lu_*/\nu$ – безразмерные скорость, расстояние от стенки и длина пути смешения; Pr – число Прандтля; индексы: "т" – турбулентность, "гр", "ст" – величины на границе или стенке.

Введение

Для решения проблемы повышения энергетической эффективности зданий необходимо развивать методы математического моделирования теплообмена при свободной конвекции воздуха. Математическую модель составляют на основе дифференциальных уравнений движения (неразрывности и Навье–Стокса) и конвективного переноса теплоты, полагая, что с помощью их численного решения возможно найти распределение температуры t , давления p и компонент скорости u , v , w в декартовых координатах x , y , z . Обычно задачу упрощают, переходя к преобразованным переменным – функции тока и завихренности, что приводит к ограничению применения математических моделей областью двумерных задач, делает их малоинформативными.

Одной из причин, затрудняющих решение трехмерных задач свободной конвекции, является особенность структуры уравнений Навье–Стокса. Сила тяжести входит только в уравнение для вертикальной компоненты скорости v , а на горизонтальные компоненты скорости u и w сила тяжести оказывает влияние косвенно посредством уравнения неразрывности, связывающего между собой все три компоненты скорости. Такая отда-

ленная взаимосвязь функций препятствует нормальной сходимости итераций при численном решении задачи.

Другой причиной может быть малая вязкость воздуха при комнатной температуре, приводящая к появлению турбулентности [1]. Встает естественный вопрос, почему известные методы расчета турбулентности не используются в математических моделях свободной конвекции воздуха в помещениях. Возможно, ответ заключается в том, что пока еще не вполне ясно, как рассчитывать слабую турбулентность вблизи стенки.

В численных исследованиях процессов вынужденной конвекции применяется двухпараметрическая диссипативная модель турбулентности, позволяющая вычислять турбулентный аналог кинематического коэффициента вязкости ν_T в соответствии с полуэмпирической гипотезой Колмогорова:

$$\nu_T = c_\mu f_\mu k_T^2 / \varepsilon_T, \quad (1)$$

где k_T – кинетическая энергия турбулентных пульсаций, ε_T – скорость диссипации энергии турбулентности, c_μ – эмпирический коэффициент ($c_\mu \approx 0,09$), f_μ – поправочная функция для слаборазвитой турбулентности вблизи стенки [2].

Для расчета турбулентности вблизи стенки используют также гипотезу Прандтля, из которой следует безразмерное квадратное уравнение:

$$l_+^2 \left(\frac{du_+}{dy_+} \right)^2 + \frac{du_+}{dy_+} - 1 = 0.$$

где u_+ – осредненная скорость, параллельная поверхности стенки, y_+ – безразмерное расстояние от стенки до расчетной точки, l_+ – безразмерная длина пути смешения.

Его решение дает безразмерные выражения для производной от скорости:

$$\frac{du_+}{dy_+} = \left(\sqrt{4l_+^2 + 1} - 1 \right) / (2l_+^2), \quad (2)$$

и для турбулентной вязкости вблизи стенки

$$\frac{\nu_T}{\nu} = \left(\sqrt{4l_+^2 + 1} - 1 \right) / 2. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) становятся пригодными для расчета турбулентного движения только в том случае, если известно изменение длины пути смешения l_+ по нормали к стенке. При расчете параметров развитой турбулентности обычно учитывают, что вблизи поверхности стенки в турбулентном потоке образуется равновесный подслой, в котором длина пути смешения прямо пропорциональна расстоянию до стенки y_+ :

$$l_+ = \kappa y_+, \quad (4)$$

где κ – универсальная постоянная, имеющая значение 0,41 [2].

В дополнение к линейной зависимости (4) целесообразно в случае слабой турбулентности использовать эмпирическую формулу, определяющую безразмерную длину пути смешения в вязком подслое и переходной области (при $y_+ < 60$), где турбулентные пульсации заглушаются, при параметре $A_+ = 30$ [3]:

$$l_+ = \kappa y_+ \left\{ 1 - \exp \left(- y_+ / \left(A_+ - 0,25 y_+^2 / A_+ \right) \right) \right\}. \quad (5)$$

В итоге появляются предпосылки для учета слабых проявлений турбулентности.

1. Преобразование дифференциальных уравнений движения

Известно [4], что при постоянной плотности ρ слагаемое, представляющее силу тяжести в уравнениях Навье–Стокса, можно заменить на производную по вертикальной оси y от функции ρgh , где h – координата по оси y , а затем эту функцию объединить с давлением p , введя для этой суммы, например, обозначение $\tilde{p} = p + \rho gh$.

Чтобы в неизотермических условиях при переменной плотности воздуха производные от давления p в уравнениях Навье–Стокса заменить проекциями градиента функции давления \tilde{p} , следует производные от ρgh записать по правилам дифференцирования произведения функций. В результате в дифференциальные уравнение Навье–Стокса вместе с производными от функции \tilde{p} войдут также и производные от переменной плотности воздуха [5]:

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} + \frac{\partial \rho w u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} gh, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} gh, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} gh, \quad (8)$$

где μ – динамический коэффициент вязкости воздуха, g – ускорение силы тяжести.

В этом варианте записи системы дифференциальных уравнений Навье–Стокса для стационарной задачи воздействие силы тяжести на движение воздуха учитывается по каждой из трех координат. Влияние переменной плотности непосредственно передается каждой компоненте скорости, что значительно улучшает сходимость итераций.

2. Математическое моделирование слабой турбулентности

Для нахождения турбулентной вязкости по формуле (1) во внутренних точках расчетной области стационарной задачи численно решают дифференциальные уравнения переноса кинетической энергии турбулентности k_T ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u k_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v k_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w k_T}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho (v + v_T) \frac{\partial k_T}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho (v + v_T) \frac{\partial k_T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho (v + v_T) \frac{\partial k_T}{\partial z} \right) + \rho (G_T - \varepsilon_T), \end{aligned} \quad (9)$$

и скорости диссипации энергии турбулентности ε_T ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u \varepsilon_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \varepsilon_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \varepsilon_T}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \rho \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \rho \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \rho \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial z} \right) + \rho \frac{\varepsilon_T}{k_T} (c_{\varepsilon 1} G_T - c_{\varepsilon 2} \varepsilon_T), \end{aligned} \quad (10)$$

где эмпирические постоянные имеют значения: $\sigma_\varepsilon \approx 1,3$, $c_{\varepsilon 1} \approx 1,44$ и $c_{\varepsilon 2} \approx 1,92$ [2] и учитывается скорость генерации энергии турбулентности G_T .

Граничные условия к этим уравнениям целесообразно формулировать в узлах сетки, ближайших к стенам, с помощью полуэмпирической гипотезы Прандтля. Численно интегрируя уравнение (2) совместно с экспоненциальным выражением длины пути смещения (5), можно установить уточненное распределение безразмерной скорости u_+ в пристенной области (кривая 2 на рис. 1), которая при $y_+ < 40$ лежит значительно ниже логарифмической кривой 1, соответствующей линейной зависимости (4) длины пути смещения l_+ в гипотезе Прандтля.

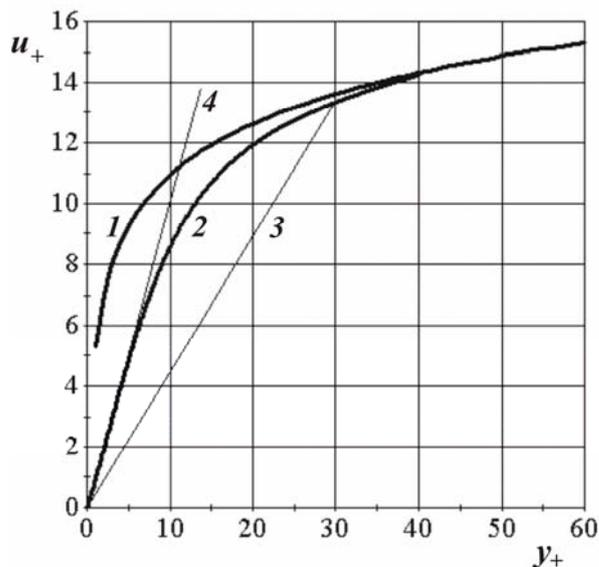


Рис. 1. Безразмерная зависимость скорости u_+ от расстояния y_+ по закону:
1 – логарифмическому, 2 – уточненному

Динамическую скорость u_* предлагается вычислять в процессе итераций как величину, заменяющую касательное напряжение на стенке:

$$u_*^2 = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Производная в этом выражении равна тангенсу угла наклона касательной в начале координат к графической зависимости скорости u от расстояния y . Обычно при дискретном представлении производной касательная приближенно заменяется хордой, что вносит в расчет значительную погрешность. Так, например, в безразмерных координатах на рис. 1 угол наклона хорды 3 заметно меньше, чем касательной 4. Между тем, для устранения расчетной погрешности достаточно дискретное значение производной u/y поделить на соотношение безразмерных величин u_+/y_+ , найденное по зависимостям рис. 1, так как тангенс угла наклона касательной 4 определяется соотношением u_+/y_+ , равным единице:

$$u_*^2 = \nu \frac{u}{y} \frac{y_+}{u_+}, \quad (11)$$

где u – скорость в узловой точке, ближайшей к стенке, y – расстояние от стенки.

Уравнение (11) пригодно для расчета любого режима течения среды вблизи стенки – и ламинарного, и турбулентного, и переходного. Единственным ограничением его применимости является предположение о том, что в расчетных условиях сохраняется классическая структура турбулентного пограничного слоя.

По найденному значению динамической скорости u_* уточняется безразмерное расстояние y_+ до ближайшего к стенке узла сетки, вычисляется турбулентная вязкость по уравнениям (3) – (5), а затем и кинетическая энергия турбулентности на границе:

$$k_T^{rp} = f_k c_\mu^{-1/2} u_*^2, \quad (12)$$

Соотношение (12) справедливо в равновесном слое при поправочном множителе $f_k = 1$. Здесь принято, что в соответствии с экспериментальными данными в переходной области по мере приближения к вязкому подслою поправочный множитель повышается до $f_k \approx 1,2$, а затем уменьшается до нуля на поверхности стенки.

Граничное значение скорости диссипации энергии турбулентности ε_T можно рассчитать по формуле, следующей из зависимости (1):

$$\varepsilon_T^{rp} = c_\mu f_\mu (k_T^{rp})^2 / v_T^{rp}. \quad (13)$$

Как показал расчет, граничные значения ε_T оказывают заметное влияние на вычисляемые по выражению (1) значения коэффициента турбулентной вязкости вдали от стен, задавая таким образом уровень турбулентности в центральной части расчетной области. В связи с этим возрастает роль поправочной функции f_μ в формуле (13).

Из анализа выражения (1) следует, что поправочная функция вблизи стенки (кривая 1 на рис. 2) равна соотношению значений турбулентной вязкости, рассчитанных по уравнению (3) при длине пути смешения, определяемой разными зависимостями – экспоненциальной (5) и линейной (4):

$$f_\mu = \frac{\sqrt{4(\kappa y_+)^2 \left\{ 1 - \exp\left(-y_+ / \left(A_+ - 0,25 y_+^2 / A_+\right)\right)\right\}^2 + 1} - 1}{\sqrt{4(\kappa y_+)^2 + 1} - 1}. \quad (14)$$

Чтобы поднять расчетный коэффициент турбулентной вязкости во внутренней области до уровня, обеспечивающего сходимость итераций, при численном решении задачи пришлось несколько уменьшить значения поправочной функции (см. кривую 2 на рис. 2). Для сравнения представлена также эмпирическая поправочная функция Лаундера и Шарма [2] (кривая 3 на рис. 2).



Рис. 2. Поправочная функция f_μ : 1 – уточненная, 2 – расчетная, 3 – Лаундер–Шарма

3. Математическая модель свободной конвекции воздуха

Математическая модель стационарного движения воздуха состоит из преобразованных дифференциальных уравнений Навье–Стокса (6) – (8), в коэффициентах которых к молекулярной вязкости μ добавлена турбулентная вязкость μ_t , и дифференциального уравнения неразрывности.

Турбулентная вязкость в комнате вычисляется по формуле (1) везде, кроме ближайших к стенкам узлов сетки, для чего численно решаются дифференциальные уравнения переноса кинетической энергии турбулентности (9) и скорости диссипации энергии турбулентности (10). Для постановки граничных условий к этим уравнениям в ближайших к стенам узлах сетки использованы выражения (3) – (5) и (11) – (14).

При переходе к дискретным алгебраическим аналогам дифференциальное уравнение неразрывности преобразуется в уравнение для расчета поля давления по схеме метода SIMPLER [4]. В отличие от этого метода, в математической модели поправка давления заменена корректирующими выражениями с расчетными источниками массы. После их подстановки в дискретные уравнения движения и небольших преобразований, разностная схема становится полностью неявной и приобретает свойство безусловной устойчивости. В итоге сходимость итераций улучшается.

Построение разнесенной (шахматной) сетки производится по рекомендациям метода SIMPLER так, чтобы избежать вычисления граничных значений поля давления. Для однозначности решения задачи, необходимо в одном из узлов сетки задать значение функции давления, например $\tilde{p}=0$. Скорость воздуха на поверхности стен принимается равной нулю, а граничные коэффициенты переноса для компонент скорости, параллельных стенам, определяются по вычисленным значениям динамической скорости.

Математическая модель учитывает, что побудителем движения в комнате является конвективный нагрев воздуха обогревающими устройствами при одновременном отводе теплоты через стены и окна. Стационарное температурное поле во внутренних узлах сетки рассчитывается с помощью дифференциального уравнения переноса теплоты конвекцией и теплопроводностью без учета теплового излучения:

$$\frac{\partial \rho c t}{\partial x} + \frac{\partial \rho v c t}{\partial y} + \frac{\partial \rho w c t}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\lambda + \frac{c \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\lambda + \frac{c \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\lambda + \frac{c \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial t}{\partial z} \right), \quad (15)$$

где t – температура, c – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, λ – коэффициент теплопроводности воздуха, μ_t – турбулентный аналог динамического коэффициента вязкости воздуха, Pr_t – турбулентное число Прандтля для воздуха.

Для вычисления плотности теплового потока теплоотдачи от воздуха к внутренней поверхности стен, окон и нагревателей используется аналогия интенсивностей переноса количества движения и теплоты:

$$q_{гр} = \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho c \frac{v}{Pr} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0},$$

где Pr – число Прандтля воздуха.

Производная в этом выражении вычисляется по тангенсу угла наклона хорды в графической зависимости разности температуры воздуха t и температуры $t_{гр}$ на поверхности нагревателя, стены или окна от расстояния y и корректируется делением на соотношение $T_+ / (y + Pr)$ для хорды, величина которого в начале координат равна единице:

$$q_{гр} = \rho c v \frac{t - t_{гр}}{y} \frac{y_+}{T_+}, \quad (16)$$

где $T_+ = (t - t_{гр})\rho u_* / q_{гр}$ – безразмерная температура.

Как следует из экспериментальных данных Жукаускаса, для турбулентного движения воздуха вблизи стенки можно принять, что за пределами вязкого подслоя безразмерные производные от температуры и скорости пропорциональны (с погрешностью порядка 5 % при $Pr_T \approx 0,75$) и, следовательно, справедливо приближенное соотношение

$$\frac{T_+}{y_+} \approx Pr_T \frac{u_+}{y_+}.$$

Подставив это соотношение в формулу (16), и учитывая (11), получим выражение для граничных условий теплоотдачи в математической модели:

$$q_{гр} = \frac{\rho c u_*^2}{Pr_T u} (t - t_{гр}), \quad (17)$$

где t – температура в ближайшем к стенке узле сетки на расстоянии y от нее, $t_{гр}$ – температура граничной поверхности, Pr_T – турбулентное число Прандтля для воздуха.

Температура поверхности окон и наружных стен комнаты находится из условия равенства плотности локального теплового потока в выражении (17) и в формуле теплопередачи через плоскую многослойную стенку. Температура поверхности пола, потолка и внутренних стен комнаты принимается равной температуре воздуха в ближайших к ним узлах сетки, так что теплоотдача к этим поверхностям не рассчитывается.

4. Обсуждение численных результатов

Цель вычислений состояла в оценке адекватности математической модели свободной конвекции воздуха, а не в исследовании особенностей обогрева реальных объектов. Это объясняет упрощенную геометрическую постановку задачи и исключение радиационного теплообмена из математической модели.

Численный эксперимент выполнен применительно к квадратной комнате длиной и шириной 5 м, высотой 2,4 м. Комната занимает угловое положение в здании и на каждой из двух ее взаимно перпендикулярных наружных стен расположен нагреватель высотой 0,6 м и над ним окно высотой 1 м. Ширина 3 м одинакова для окна и нагревателя. Нагреватель и окно считались плоскими и составляли часть плоскости стены. Таким образом, задаче придана симметрия относительно вертикальной плоскости, пересекающей комнату по диагонали. Наружные стены, выполненные из глиняного кирпича толщиной 250 мм, утеплены изнутри слоем пенобетона толщиной 120 мм и создают термическое сопротивление 0,88 м²К/Вт. Для окон задавалось термическое сопротивление 0,464 м²К/Вт. Температура нагревателя принята 60 °С, температура атмосферного воздуха -20 °С при отсутствии ветра.

Сетка по оси x , перпендикулярной передней стене, и по оси z , перпендикулярной боковой стене, выполнена с переменным шагом, который по мере удаления от наружных стен возрастает от 10 мм до 100 мм. По вертикальной оси координат y шаг сетки принимается постоянным, равным 50 мм. В итоге весь объем комнаты разделен по осям x и z на 55 слоев, по оси y – на 48 слоев. Пересечение слоев создает контрольные объемы, в центре которых находятся узлы сетки. В них определяются значения искомых функций (температура, давление) и физические свойства воздуха (теплоемкость, вязкость, плотность). В узлах сетки, лежащих на гранях контрольных объемов, определяются значения компонент скорости.

Численное решение систем дискретных уравнений математической модели выполнялось полинейной прогонкой с итерациями. Сходимость итераций контролировалась

по абсолютной величине источников массы в расчетной области. Расчет завершился, когда суммарный расчетный источник массы снижался до 10 мг/м^3 .

На рис. 3 представлены кривые, показывающие изменение температуры воздуха вблизи и вдали от стен по оси x перпендикулярно передней стене и по оси z перпендикулярно боковой стене на разных уровнях по высоте комнаты. Резкое изменение температуры воздуха происходит в довольно тонком пристенном слое порядка 10 мм, прилегающем к наружным стенам комнаты. Вдали от наружных стен комнаты температура воздуха повышается в направлении от пола к потолку, причем на каждом горизонтальном уровне она изменяется незначительно.

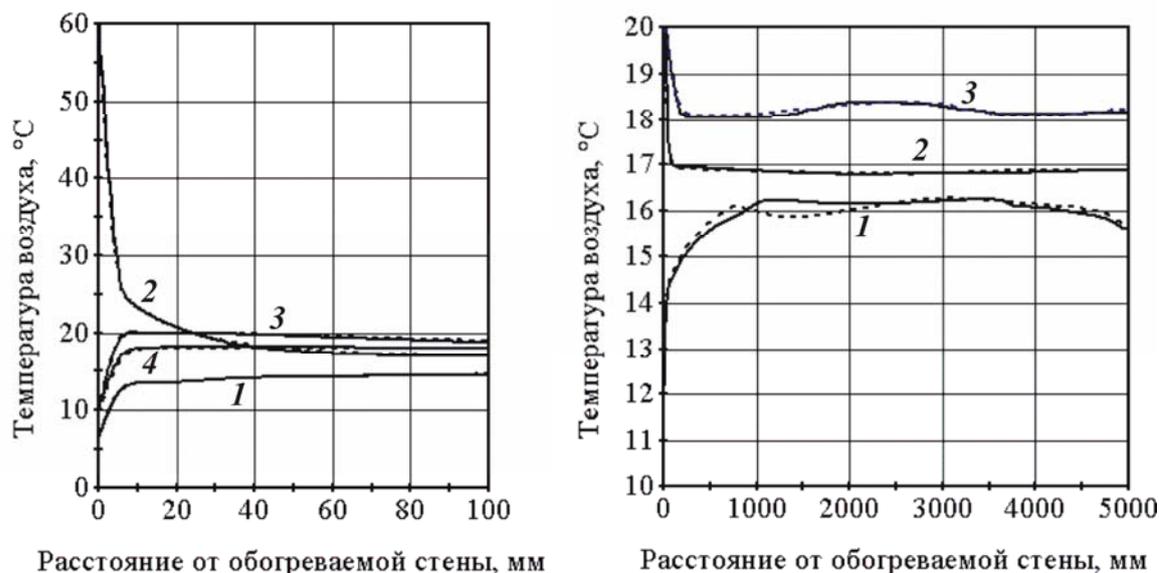


Рис. 3. Температура в вертикальной плоскости посередине комнаты по осям x (сплошные линии) и z (пунктирные линии): 1 – на 25 мм выше пола, 2, 3 – на уровне середины нагревателя и окна, 4 – на 25 мм ниже потолка

Температура воздуха над полом (кривая 1) является наиболее низкой. На внутренней поверхности стены она составляет $6,7 \text{ }^\circ\text{C}$, а вдали от стен возрастает до $16,2 \text{ }^\circ\text{C}$. Температура на уровне нагревателя (кривая 2) уменьшается от $60 \text{ }^\circ\text{C}$ на его поверхности до $28,4 \text{ }^\circ\text{C}$ на расстоянии 5 мм от него и затем до $16,8 \text{ }^\circ\text{C}$ вдали от стен. На уровне окна сначала наблюдается повышение температуры в восходящем потоке нагретого воздуха от $10,2 \text{ }^\circ\text{C}$ на его внутренней поверхности до $19,9 \text{ }^\circ\text{C}$ на расстоянии 17...33 мм от окна, затем снижение до $18...18,4 \text{ }^\circ\text{C}$ вдали от стен (кривая 3). Температура под потолком на кривой 4 ниже, чем на уровне окна, но вдали от стен повышается до $18,5 \text{ }^\circ\text{C}$.

Характерно, что температурные кривые по осям x и z почти везде совпадают, что подтверждает неплохую диагональную симметрию температурных полей в комнате.

Распределение вертикальной скорости воздуха характеризуется вблизи наружных стен более заметными локальными отклонениями от диагональной симметрии. Так, согласно рис. 4, на расстоянии 5 мм от передней стены вертикальная скорость достигает $0,44 \text{ м/с}$, в то время как на таком же расстоянии от боковой стены только $0,37 \text{ м/с}$. Следовательно, локальная погрешность вычисления скорости воздуха составляет здесь около 20 %.

Вдали от наружных стен вычисленные значения вертикальной скорости, как и следовало ожидать, близки к нулю по обоим горизонтальным осям координат.

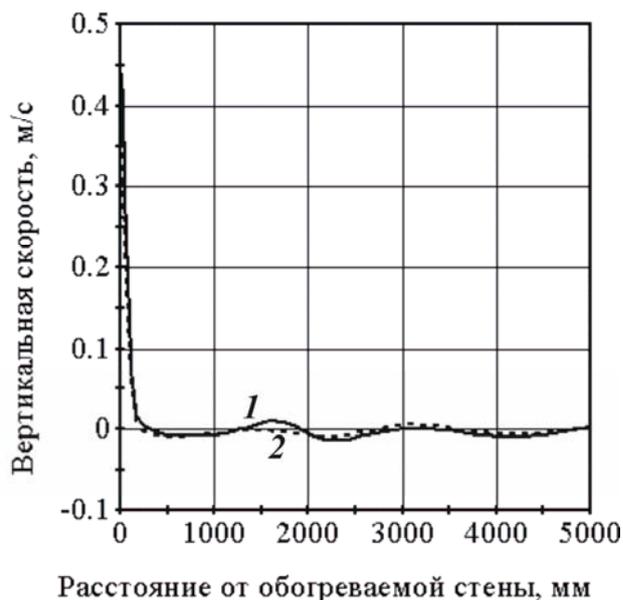


Рис. 4. Изменение вертикальной компоненты скорости v посередине комнаты (удаление от соседних стен 2,5 м, от пола 1,2 м) вдоль осей: 1 – x , 2 – z

Более наглядно локальное отклонение от диагональной симметрии показано на рис. 5, где представлена вертикальная компонента скорости воздуха на уровне середины нагревателя в плоскостях, отстоящих на 5 мм от боковой и передней стен.

Рис. 5 дает представление о том, что практически по всей ширине нагревателя существует подъемный поток нагретого воздуха, который способствует повышению температуры вблизи расположенного над ним окна. Левее и правее нагревателя возникает опускное движение воздуха, причем максимальная скорость направленного вниз потока составляет 0,6 м/с в углу комнаты, образованном наружными стенами. Более слабое опускное движение образуется под нагревателем.

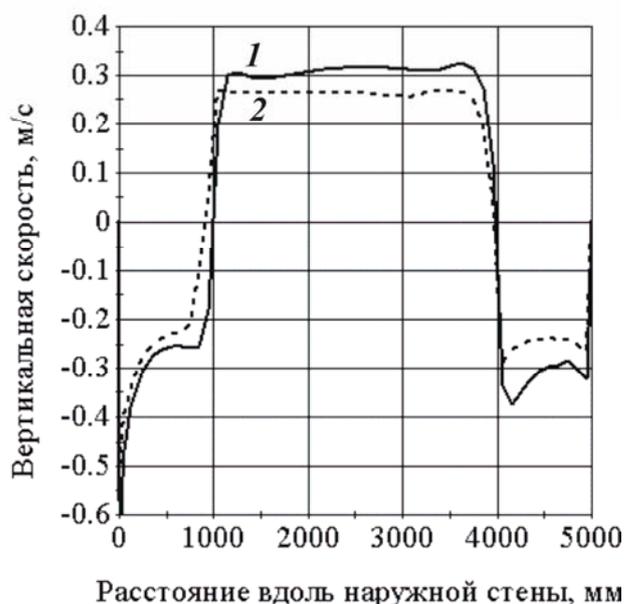


Рис. 5. Вертикальное движение воздуха на уровне нагревателя на расстоянии 5 мм: 1 – от боковой стены, 2 – от передней стены

Этот нисходящий поток воздуха встречает на своем пути пол комнаты, поворачивает и продолжает свое движение в горизонтальной плоскости непосредственно над полом. Кривые на рис. 6 показывают, что горизонтальная скорость воздуха над полом может достигать 0,2 м/с. В то же время, согласно рис. 6, распределение горизонтальных компонент скорости в комнате в целом подчиняется диагональной симметрии.

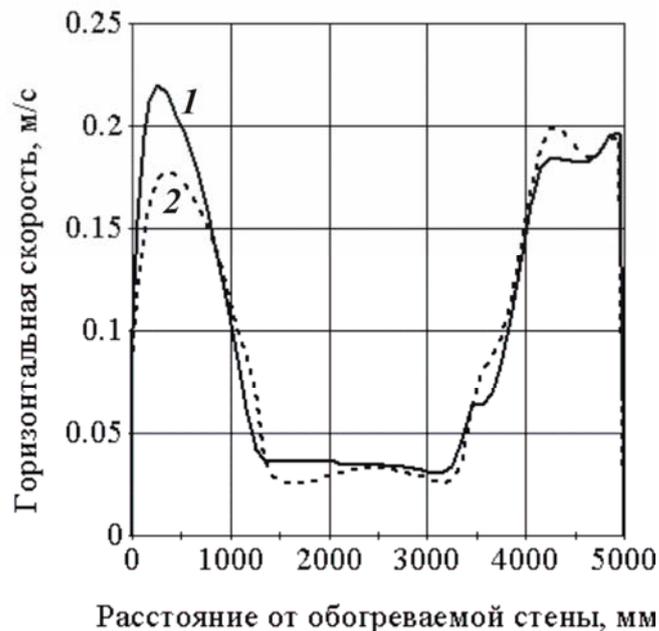


Рис. 6. Изменение горизонтальной скорости в плоскости на 25 мм выше пола на расстоянии 255 мм от вертикальных стен: 1 – u по оси z , 2 – w по оси x

На рис. 7 отложены расчетные значения турбулентного аналога кинематического коэффициента вязкости.

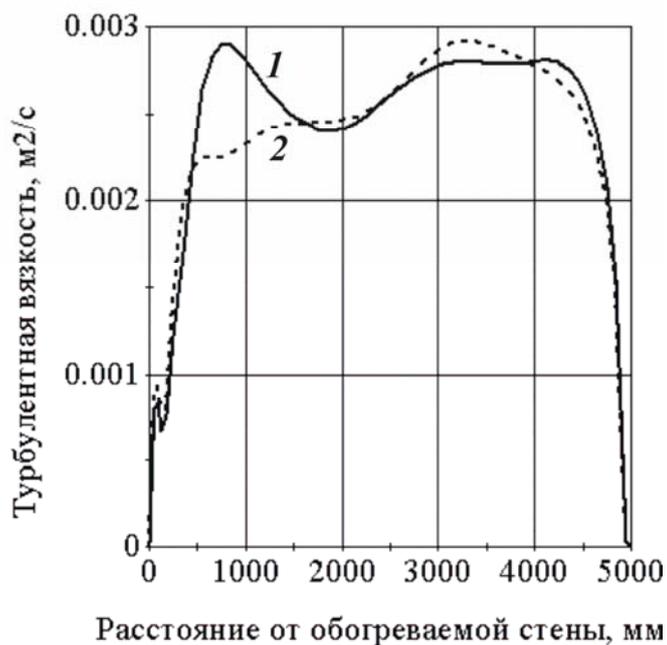


Рис. 7. Изменение турбулентного аналога кинематического коэффициента вязкости ν_t посередине комнаты: 1 – по оси x , 2 – по оси z

Хотя кривые 1 и 2, представляющие значения турбулентного аналога кинематического коэффициента вязкости ν_T по осям x и z , в своей средней части не вполне совпадают друг с другом, все же можно утверждать, что и здесь приближенно воссоздается диагональная симметрия комнаты.

Как отмечалось ранее, расчетные значения коэффициента турбулентной вязкости вдали от стен несколько завышены из-за введения в математическую модель скорректированной поправочной функции f_μ . Заметные расхождения кривых на рис. 7 также возникают вдали от стен комнаты. Однако отмеченные неточности не приводят к сколько-нибудь заметному искажению распределения температуры и скорости воздуха.

Таким образом, в какой-то мере подтверждается существующее представление о том, что в основном объеме помещения влиянием турбулентной вязкости можно пренебречь.

Выводы

Решены две основные проблемы, препятствующие в настоящее время численному исследованию трехмерной свободной конвекции воздуха при обогреве помещений: улучшена форма представления силы тяжести в дифференциальных уравнениях Навье–Стокса и корректно учтены слабые проявления турбулентности.

Получены формулы для вычисления динамической скорости на стенке и уточнены граничные условия в математических моделях турбулентности и теплоотдачи к воздуху. В итоге построена трехмерная математическая модель свободной конвекции воздуха в обогреваемой комнате, разработана компьютерная программа и обеспечена сходимость итераций при ее численной реализации.

Представленные распределения температуры и скорости воздуха в комнате, обладающей диагональной симметрией, позволяют оценить точность численного эксперимента и свидетельствуют о приемлемой достоверности полученных результатов.

Литература

1. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Вerezуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1987.
2. Пейтел В.К., Роди В., Шойерер Г. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса. Аэрокосмическая техника. 1986. № 2. С. 184 - 197.
3. Кузнецов В.А. Уточнение гипотез пристенной турбулентности. ИФЖ. 1986. Т. 50, № 6. С. 917 - 922.
4. Ferziger J.H., Peric' M. Computational methods for fluid dynamics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2003.
5. Кузнецов В.А., Наренкова Я.В. Математическая модель свободной конвекции воздуха в помещениях // Научные исследования, наносистемы и ресурсосберегающие технологии в стройиндустрии. Ч. 8. Белгород, БГТУ им. В.Г. Шухова, 2007. С. 72 - 74.